Derivasjon av et produkt

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Derivasjon av et produkt

Produktregelen

- Vi kan nå derivere både $(x^2 + 1)$ og $\sqrt{2x - 2}$, men ikke (ennå!) $(x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

Produktregelen

- Vi kan nå derivere både (x^2+1) og $\sqrt{2x-2}$, men ikke (ennå!) $(x^2+1)\sqrt{2x-2}$.
- Vi trenger en regel som deriverer produktet av to funksjoner.

Produktregelen

- Vi kan nå derivere både (x^2+1) og $\sqrt{2x-2}$, men ikke (ennå!) $(x^2+1)\sqrt{2x-2}$.
- Vi trenger en regel som deriverer produktet av to funksjoner.

Regel

Om vi har funksjonene $u(x)$ og $v(x)$, får vi

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Produktregelen

- Vi kan nå derivere både (x^2+1) og $\sqrt{2x-2}$, men ikke (ennå!) $(x^2+1)\sqrt{2x-2}$.
- Vi trenger en regel som deriverer produktet av to funksjoner.

Regel

Om vi har funksjonene $u(x)$ og $v(x)$, får vi

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

- Rekkefølgen her har ikke noe å si, vi kunne skrevet $u \cdot v' + u' \cdot v$.

Produktregelen

- Vi kan nå derivere både (x^2+1) og $\sqrt{2x-2}$, men ikke (ennå!) $(x^2+1)\sqrt{2x-2}$.
- Vi trenger en regel som deriverer produktet av to funksjoner.

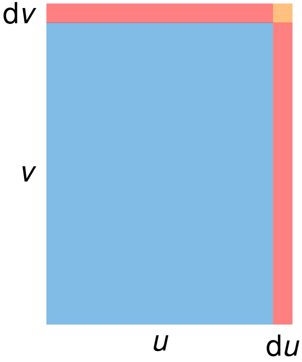
Regel

Om vi har funksjonene $u(x)$ og $v(x)$, får vi

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

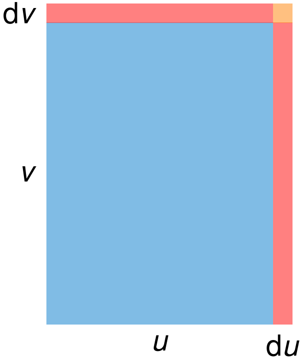
- Rekkefølgen her har ikke noe å si, vi kunne skrevet $u \cdot v' + u' \cdot v$.
- Jeg anbefaler å huske rekkefølgen i regelen, da det kommer til å gjøre brøkregelen lettere å huske.

Et (raskt) bevis



- Vi har at $u \cdot v$ er arealet av rektangelet med sider u og v.

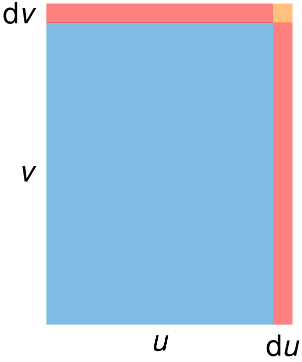
Et (raskt) bevis



- Vi har at $u \cdot v$ er arealet av rektangelet med sider u og v.
- Dersom vi endrer u og v uendelig lite, du og dv, blir endringen i arealet

$$\mathrm{d}(u \cdot v) = \mathrm{d}u \cdot v + u \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Et (raskt) bevis



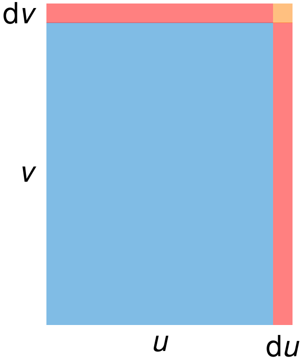
- Vi har at $u \cdot v$ er arealet av rektangelet med sider u og v.
- Dersom vi endrer u og v uendelig lite, du og dv, blir endringen i arealet

$$\mathrm{d}(u \cdot v) = \mathrm{d}u \cdot v + u \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- Vi deler begge sider på dx og får

$$\frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} v + u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Et (raskt) bevis



- Vi har at $u \cdot v$ er arealet av rektangelet med sider u og v.
- Dersom vi endrer u og v uendelig lite, du og dv, blir endringen i arealet

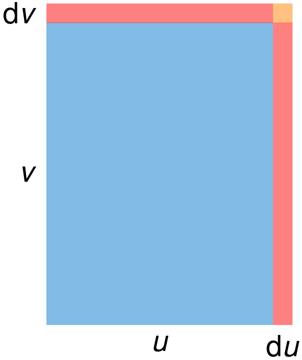
$$\mathrm{d}(u \cdot v) = \mathrm{d}u \cdot v + u \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- Vi deler begge sider på dx og får

$$\frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- Her er $\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = u'(x) \cdot \mathrm{d}v$ uendelig lite, og ignoreres.

Et (raskt) bevis



- Vi har at $u \cdot v$ er arealet av rektangelet med sider u og v.
- Dersom vi endrer u og v uendelig lite, du og dv, blir endringen i arealet

$$\mathrm{d}(u \cdot v) = \mathrm{d}u \cdot v + u \cdot \mathrm{d}v + \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- Vi deler begge sider på dx og får

$$\frac{\mathrm{d}(u \cdot v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- Her er $\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = u'(x) \cdot \mathrm{d}v$ uendelig lite, og ignoreres.
- Vi får derfor $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Derivasjon av et produkt

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.
- Vi får da

$$f'(x) = (u \cdot v)'$$

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.
- Vi får da

$$f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.
- Vi får da

$$f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot \sqrt{2x - 2} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x - 2}}$$

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2+1)\sqrt{2x-2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x-2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.
- Vi får da

$$f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot \sqrt{2x-2} + (x^2+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$$

$$= \frac{2x(2x-2)}{\sqrt{2x-2}} + \frac{x^2+1}{\sqrt{2x-2}}$$

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.
- Vi får da

$$f'(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot \sqrt{2x - 2} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x - 2}}$$

$$= \frac{2x(2x - 2)}{\sqrt{2x - 2}} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x - 2}} = \frac{5x^2 - 4x + 1}{\sqrt{2x - 2}}$$

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3\left(x^2 + 2x - 1\right)$.

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.
- Vi får da

$$f(x) = (u \cdot v)' =$$

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.
- Vi får da

$$f(x) = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.
- Vi får da

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 3x^2 \cdot (x^2 + 2x - 1) + x^3 \cdot (2x + 2) \end{aligned}$$

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.
- Vi får da

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\
&= 3x^2 \cdot (x^2 + 2x - 1) + x^3 \cdot (2x + 2) \\
&= 5x^4 + 8x^3 - 3x^2
\end{aligned}
$$

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.
- Vi får da

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\ &= 3x^2 \cdot (x^2 + 2x - 1) + x^3 \cdot (2x + 2) \\ &= 5x^4 + 8x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

- Her hadde det vært lettere å gange ut for å få $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3$ og så derivere til $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 3x^2$.

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

- Dette er ikke et produkt, men vi kan gjøre det om til ett.

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

- Dette er ikke et produkt, men vi kan gjøre det om til ett.
- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \frac{1}{x-2}$.

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

- Dette er ikke et produkt, men vi kan gjøre det om til ett.
- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \frac{1}{x-2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = -\frac{1}{(x-2)^2}$.

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

- Dette er ikke et produkt, men vi kan gjøre det om til ett.
- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \frac{1}{x-2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = -\frac{1}{(x-2)^2}$.
- Og får da

$$
\begin{aligned}
f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' &= \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2}{(x-2)^2} \\
&= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

- Dette er ikke et produkt, men vi kan gjøre det om til ett.
- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \frac{1}{x-2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = -\frac{1}{(x-2)^2}$.
- Og får da

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

- I neste delkapittel skal vi lære brøkregelen, som gjør disse utregningene lettere.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET