# Sammensatte funksjoner

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**
STORBYUNIVERSITETET


Foto: Ronny Østnes / OsloMet

# Sammensatte funksjoner og kjerneregelen

# Sammensatte funksjoner

- Hvis vi har $g(u) = u^2 + 3u$ og $u(x) = 2x^2$ kan vi sette sammen funksjonene til
$$g(u(x)) = (u(x))^2 + 3 \cdot u(x) = (2x^2)^2 + 3 \cdot 2x^2 = 4x^4 + 6x^2.$$
- Vi skriver $g(u)$ for å hinte om at vi planlegger sette inn $u(x)$ i $g$, men vi kunne ha skrevet $g(x)$ også.
- Å dele opp i sammensatt funksjon gjør at vi kan regne ut $f(x)$ i to steg.
- Først regner vi ut $u = 2x^2$, så regner vi ut $g = u^2 + 3u$.
- Vi kaller $u(x)$ for kjernen til sammensetningen.
- Vi kan også ha funksjoner som består av flere sammensetninger.
- Om $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ kan vi skrive
$$f(x) = g(u(v(x))) \qquad g(u) = \frac{1}{u} \qquad u(v) = \sqrt{v} \qquad v(x) = x^2 + 1.$$

# Kjerneregelen

- Vi kan derivere funksjonen $\sqrt{x}$ og funksjonen $x^2 + 1$.
- Men vi kan ikke (ennå) derivere $\sqrt{x^2 + 1}$.
- Vi kan skrive $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ som en sammensatt funksjon.
- Vi velger $g(u) = \sqrt{u}$ og $u(x) = x^2 + 1$. Vi får da $f(x) = g(u(x))$.
- Vi kan finne både $g'(u)$ og $u'(x)$, og vil kombinere dem til $f'(x)$.
- Det viser seg at det riktige er å gange.

**Regel (Kjerneregelen)**

*Om vi kan skrive $f(x) = g(u(x))$ har vi*

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x).$$

# Kjerneregelen, eksempel

**Oppgave**

Finn den deriverte til $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- Vi skriver $g(u) = \sqrt{u}$ og $u(x) = x^2 + 1$.
- Vi får da $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ og $u'(x) = 2x$.
- Fra kjerneregelen får vi derfor

$$\begin{aligned} f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

# Kjerneregelen, eksempel II

**Oppgave**

Finn den deriverte til $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^3$.

- Vi setter $g(u) = u^3$ og $u(x) = x^2 + 1$.
- Vi får da $g'(u) = 3u^2$ og $u'(x) = 2x$.
- Fra kjerneregelen får vi derfor

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) = 3u^2 \cdot 2x \\ &= 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2 \end{aligned}$$

- Her kunne vi også regnet ut

$$f(x) = \left(x^2+1\right)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

og så fått $f'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$, men det er mer arbeid.

# Kjerneregelen, eksempel III

## Oppgave

Finn den deriverte til $f(x) = \frac{1}{x^3+2x}$.

- Vi setter $g(u) = \frac{1}{u}$ og $u(x) = x^3 + 2x$.
- Vi får da $g'(u) = -\frac{1}{u^2}$ og $u'(x) = 3x^2 + 2$.
- Fra kjerneregelen får vi derfor

$$
\begin{aligned}
f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = -\frac{1}{u^2} \cdot (3x^2 + 2) = -\frac{3x^2+2}{\left(x^3+2x\right)^2} \\
= -\frac{3x^2+2}{\left(x\left(x^2+2\right)\right)^2} = -\frac{3x^2+2}{x^2\left(x^2+2\right)^2}
\end{aligned}
$$

# Kjerneregelen, forenklet utregning

- Når vi blir bedre på å bruke kjerneregelen, slipper vi å skrive så mye.
- Det første steget er at vi ikke lenger gidder skrive opp $g(u)$.
- Eksempel: Deriverer $f(x) = \sqrt{x-1} = \sqrt{u}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \left(\sqrt{u}\right)' \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

- Det neste steget er at vi ikke gidder skrive opp $u$ heller.
- Vi må fremdeles huske å gange med $u'$.
- Eksempel: Deriverer $f(x) = \sqrt{x-1}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

# Kjerneregelen, eksempel IV

## Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{1}{x+1} + \sqrt{x^2 - 2}$.

- Her bruker vi kjerneregelen på hvert ledd.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{x+1} + \sqrt{x^2-2}\right)' = \left(\frac{1}{x+1}\right)' + \left(\sqrt{x^2-2}\right)' \\
&= -\frac{1}{(x+1)^2} \cdot (x+1)' + \frac{1}{2\sqrt{x^2-2}} \cdot \left(x^2-2\right)' \\
&= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}
\end{aligned}$$

# Differensialer og deriverte

# Differensialer

- Vi kan også skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ i stedet for $f'(x)$.
- Her er $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$ differensialer.
  - Differensialet $\mathrm{d}x$ betyr «en uendelig liten endring i $x$.»
  - Differensialet $\mathrm{d}f$ betyr «en uendelig liten endring i $f$.»
- Siden den deriverte er vekstfarten til grafen, får vi da at

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Dersom vi gjør en uendelig liten endring i $x$ må vi gange med vekstfarten for å finne endringen i $f$.
- Om vi deler begge sider på $\mathrm{d}x$ ser vi at vi får

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

# Differensialer og tilnærming

- Siden $\mathrm{d}x$ er uendelig liten, stemmer ikke formelen $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ for vanlige tall.
- Men om tallene er veldig små får vi en god tilnærming.

**Oppgave**

Om $f(3) = 5$ og $f'(3) = 9$, hva blir $f(3{,}0001)$?

- Vi bruker $\mathrm{d}x = 0{,}0001$ i formelen og får

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = 9 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0009.$$

- Endringen i $f$ er derfor $0{,}0009$.
- Den nye verdien til $f$ er derfor $5 + 0{,}0009 = 5{,}0009$.
- Jeg brukte $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4$ for å finne tallene, som gir meg at det ekte svaret er $f(3{,}0001) = 5{,}000\,900\,03$.

# Differensialer og kjerneregelen

- Om en funksjon er gitt ved $y = \sqrt{x^2 + 1}$ kan vi definere $u = x^2 + 1$.
- Vi får da $y = \sqrt{u}$.
- Om vi deriverer $y$ med hensyn på $u$ får vi $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$.
- Om vi deriverer $u$ med hensyn på $x$ får vi $\frac{du}{dx} = 2x$.
- Fra kjerneregelen får vi da
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$
- Vi kan huske kjerneregelen ved at vi kan stryke d$u$-ene mot hverandre i produktet:
$$\frac{dy}{\cancel{du}} \cdot \frac{\cancel{du}}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

OSLOMET

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**

STORBYUNIVERSITETET