Optimering i geometri

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Geometriske problemer

Optimering av areal og volum

- Dersom et rektangel har omkrets på 400 cm, kan arealet være mye rart.
- Men hva er det største arealet vi kan få?
- For å løse denne typen oppgaver, burde vi
  1. Sette navn på de viktige geometriske størrelsene.
  2. Skrive opp størrelsen vi skal optimere.
  3. Skrive opp alle ekstra betingelser som formler.
  4. Skrive om det vi skal optimere så den kun har én variabel, ved hjelp av betingelsene.
  5. Finne ekstremalpunktene til funksjonen.
- I vårt eksempel kaller vi den ene siden i rektangelet for x og den andre for y.
- Vi skal da optimere arealet, $A = x \cdot y$, under betingelsen

$$\begin{aligned} x + y + x + y &= 400 \\ x + y &= 200 \\ y &= 200 - x. \end{aligned}$$

Optimering av areal, eksempel

Oppgave

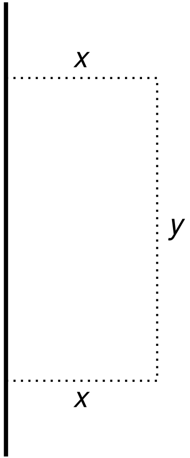
Et rektangel har omkrets på 400 cm. Hva er det største arealet den kan ha?

- Vi så på forrige side at om sidene i rektangelet heter x og y, får vi $y = 200 - x$, fra betingelsen på omkretsen.
- Arealet blir da
$$A = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2.$$
- Dette er en funksjon av x, så vi kan derivere.
- Vi får $A'(x) = 200 - 2x$, så $A'(x) = 0$ gir $x = 100$.
- Om $x = 100$ får vi at arealet blir
$$A(100) = 200 \cdot 100 - 100^2 = 10000.$$

Definisjonsmengde til geometriske problemer

- I eksempelet på forrige side må vi også sjekke endepunktene.
- Men hva er definisjonsmengden til $A(x)$?
- Det laveste x kan være, er 0. Vi kan ikke ha negative lengder.
- Siden $y = 200 - x$ kan ikke x være større enn 200
- Da ville y blitt negativ.
- Definisjonsmengden til $A(x)$ er derfor $[0, 200]$.
- Vi kunne diskutert om det burde vært $\langle 0, 200 \rangle$.
- Er en rett strek et rektangel hvor den ene siden har lengde 0?
- Uansett kan vi sette inn endepunktene og finne ut at arealet da blir 0.
- Så $x = 100$ gir fremdeles det største arealet.

Optimering av areal, eksempel II



Oppgave

En bonde har 30 m langt gjerde, og skal spenne opp et rektangulært område langs en låvevegg. Hva er det største mulige arealet?

- Vi har tegnet situasjonen til venstre, og gitt navn til sidene.
- Vi skal maksimere $x \cdot y$, og vi har at $x + y + x = 30$.
- Det gir oss $y = 30 - 2x$ og $A(x) = x \cdot (30 - 2x) = 30x - 2x^2$.
- Definisjonsmengden blir $[0, 15]$.

Optimering av areal, eksempel II

- Vi skal maksimere $A(x) = 30x - 2x^2$.
- Vi deriverer og får $A'(x) = 30 - 4x$.
- Vi løser den deriverte lik null, og får

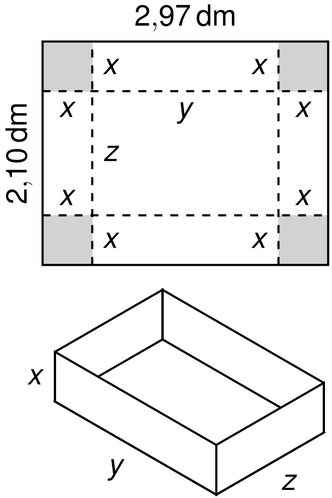
$$30 - 4x = 0 \iff x = 7{,}5.$$

- Våre mulige toppunkt er derfor $x = 0$, $x = 7{,}5$, og $x = 15$.
- Vi får

$$A(0) = 0, \qquad A(7{,}5) = 112{,}5, \qquad A(15) = 0.$$

- Det maksimale arealet er derfor når $x = 7{,}5$, og gir et areal på $112{,}5\,\mathrm{m}^2$.

Optimering av volum, eksempel



- Vi skal klippe ut kvadratiske biter av et A4-ark, og brette resten til en boks. Se figur.
- Hva er det største volumet vi kan få?
- Vi kaller høyden, lengden og bredden av boksen for x, y, og z.
- Vi skal da maksimere $V = x \cdot y \cdot z$.
- Vi ser fra figuren at $y = 2{,}97 - 2x$ og $z = 2{,}10 - 2x$.
- Vi får derfor

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (2{,}97 - 2x) \cdot (2{,}10 - 2x) \\ &= 4x^3 - 10{,}14x^2 + 6{,}237x. \end{aligned}$$

Optimering av volum, eksempel

- Vi har funnet ut at vi skal maksimere $V(x) = 4x^3 - 10{,}14x^2 + 6{,}237x$.
- Definisjonsmengden er $[0, 1{,}05]$.
- Vi deriverer V og får

$$V'(x) = 12x^2 - 20{,}28x + 6{,}237.$$

- Løser vi $V'(x) = 0$ får vi $x = 0{,}4042$ og $x = 1{,}2858$.
- Siden $1{,}2858$ er utenfor definisjonsmengden, får vi at de mulige toppunktene er $x = 0$, $x = 0{,}4042$ og $x = 1{,}05$.
- Vi får

$$V(0) = 0, \qquad V(0{,}4042) = 1{,}128, \qquad V(1{,}05) = 0.$$

- Det største volumet får vi derfor ved å klippe ut kvadrater med sidekanter $4{,}042\,\mathrm{cm}$, og da får vi et volum på $1{,}128\,\mathrm{dm}^3 = 1{,}128\,\mathrm{L}$.

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY

STORBYUNIVERSITETET