# Optimering

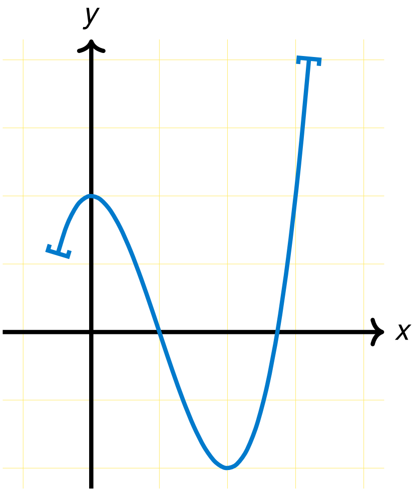
**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

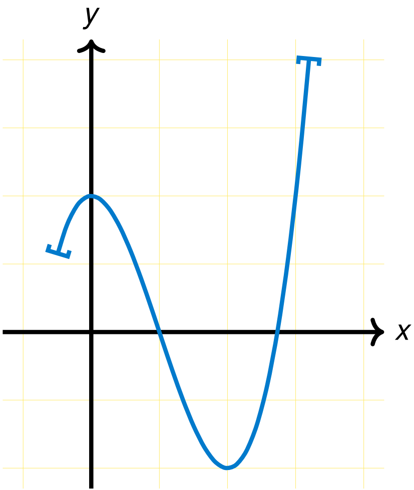
# Optimering

# Topp- og bunnpunkter



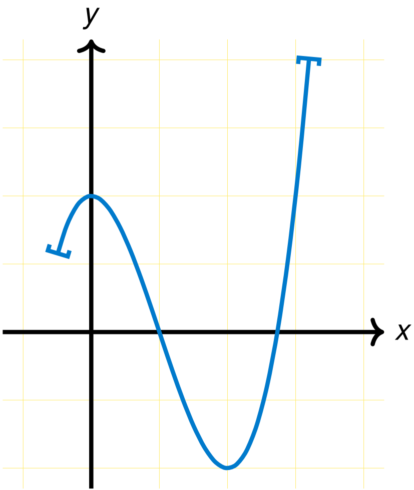

- Et toppunkt er et punkt hvor funksjonen er større enn punktene i nærheten.

# Topp- og bunnpunkter



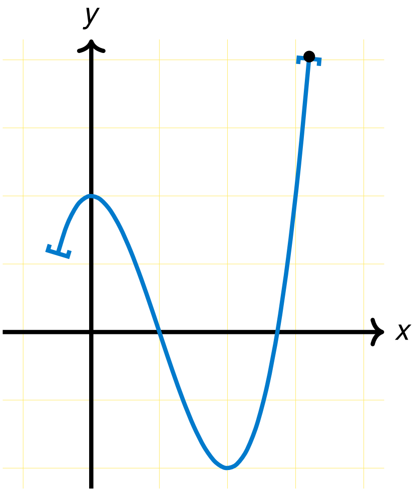

- Et toppunkt er et punkt hvor funksjonen er større enn punktene i nærheten.
- Et bunnpunkt er et punkt hvor funksjonen er mindre enn punktene i nærheten.

# Topp- og bunnpunkter



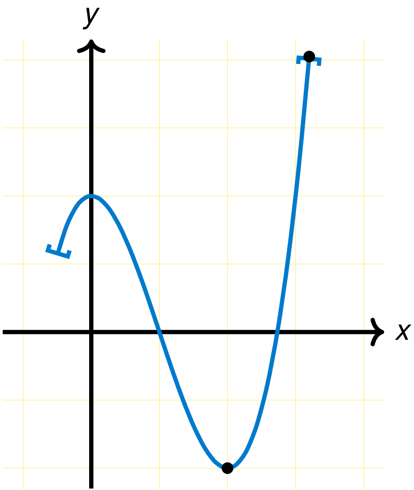

- Et toppunkt er et punkt hvor funksjonen er større enn punktene i nærheten.
- Et bunnpunkt er et punkt hvor funksjonen er mindre enn punktene i nærheten.
- Et globalt topp- eller bunnpunkt er et punkt som er større/mindre enn alle andre punkter.

# Topp- og bunnpunkter




- Et toppunkt er et punkt hvor funksjonen er større enn punktene i nærheten.
- Et bunnpunkt er et punkt hvor funksjonen er mindre enn punktene i nærheten.
- Et globalt topp- eller bunnpunkt er et punkt som er større/mindre enn alle andre punkter.
- Her ser vi at det globale toppunktet er i høyre endepunkt.

# Topp- og bunnpunkter




- Et toppunkt er et punkt hvor funksjonen er større enn punktene i nærheten.
- Et bunnpunkt er et punkt hvor funksjonen er mindre enn punktene i nærheten.
- Et globalt topp- eller bunnpunkt er et punkt som er større/mindre enn alle andre punkter.
- Her ser vi at det globale toppunktet er i høyre endepunkt.
- Og det globale bunnpunktet er i det stasjonære punktet i $x = 2$.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.
- Da er de to valgene fra forrige side de eneste mulighetene.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.
- Da er de to valgene fra forrige side de eneste mulighetene.
- Et ekstremalpunkt vil enten være et stasjonært punkt, eller et endepunkt.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.
- Da er de to valgene fra forrige side de eneste mulighetene.
- Et ekstremalpunkt vil enten være et stasjonært punkt, eller et endepunkt.
- Om funksjonen ikke er deriverbar i et punkt, må vi også sjekke det punktet.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.
- Da er de to valgene fra forrige side de eneste mulighetene.
- Et ekstremalpunkt vil enten være et stasjonært punkt, eller et endepunkt.
- Om funksjonen ikke er deriverbar i et punkt, må vi også sjekke det punktet.
- Om funksjonen er definert på et åpent intervall kan det være den ikke har globale ekstremalpunkt.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.
- Da er de to valgene fra forrige side de eneste mulighetene.
- Et ekstremalpunkt vil enten være et stasjonært punkt, eller et endepunkt.
- Om funksjonen ikke er deriverbar i et punkt, må vi også sjekke det punktet.
- Om funksjonen er definert på et åpent intervall kan det være den ikke har globale ekstremalpunkt.
- Ekstremalpunktet «burde» vært på kanten, men er ikke en del av definisjonsmengden.

# Ekstremalpunkt og hvor de er å finne

- Anta en funksjon er deriverbar på et lukket intervall.
- Da er de to valgene fra forrige side de eneste mulighetene.
- Et ekstremalpunkt vil enten være et stasjonært punkt, eller et endepunkt.
- Om funksjonen ikke er deriverbar i et punkt, må vi også sjekke det punktet.
- Om funksjonen er definert på et åpent intervall kan det være den ikke har globale ekstremalpunkt.
- Ekstremalpunktet «burde» vært på kanten, men er ikke en del av definisjonsmengden.
- Dette kan også skje om den er definert på et lukket intervall, men ikke kontinuerlig.

# Optimering

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.
- Om det vi optimerer beskrives av en funksjon, betyr det da typisk å finne globalt toppunkt eller bunnpunkt.

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.
- Om det vi optimerer beskrives av en funksjon, betyr det da typisk å finne globalt toppunkt eller bunnpunkt.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du kan tjene, vil du finne det globale toppunktet.

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.
- Om det vi optimerer beskrives av en funksjon, betyr det da typisk å finne globalt toppunkt eller bunnpunkt.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du kan tjene, vil du finne det globale toppunktet.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du skal betale, vil du finne det globake bunnpunktet.

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.
- Om det vi optimerer beskrives av en funksjon, betyr det da typisk å finne globalt toppunkt eller bunnpunkt.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du kan tjene, vil du finne det globale toppunktet.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du skal betale, vil du finne det globake bunnpunktet.
- Vi kan også være interessert i når funksjonen vokser eller synker fortest.

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.
- Om det vi optimerer beskrives av en funksjon, betyr det da typisk å finne globalt toppunkt eller bunnpunkt.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du kan tjene, vil du finne det globale toppunktet.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du skal betale, vil du finne det globake bunnpunktet.
- Vi kan også være interessert i når funksjonen vokser eller synker fortest.
- Da finner vi ekstremalpunkt for den deriverte.

# Optimering

- Å optimere noe betyr å finne ut av når det er best.
- Om det vi optimerer beskrives av en funksjon, betyr det da typisk å finne globalt toppunkt eller bunnpunkt.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du kan tjene, vil du finne det globale toppunktet.
- Om en funksjon beskriver hvor mye du skal betale, vil du finne det globake bunnpunktet.
- Vi kan også være interessert i når funksjonen vokser eller synker fortest.
- Da finner vi ekstremalpunkt for den deriverte.
- Ekstremalpunktene er da enten i endepunktene eller vendepunktene.

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.
- Funksjonen vi skal maksimere er $f(x) = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$.

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.
- Funksjonen vi skal maksimere er $f(x) = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$.
- Vi finner toppunkt ved å derivere, og sette deriverte lik null.

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.
- Funksjonen vi skal maksimere er $f(x) = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$.
- Vi finner toppunkt ved å derivere, og sette deriverte lik null.

$$f'(x) = 0$$

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.
- Funksjonen vi skal maksimere er $f(x) = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$.
- Vi finner toppunkt ved å derivere, og sette deriverte lik null.

$$f'(x) = 0 \iff 200 - 2x = 0$$

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.
- Funksjonen vi skal maksimere er $f(x) = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$.
- Vi finner toppunkt ved å derivere, og sette deriverte lik null.

$$f'(x) = 0 \iff 200 - 2x = 0 \iff 100 = x.$$

# Optimering, eksempel

**Oppgave**

Summen av to tall er 200. Hva er det høyeste produktet du kan få?

- Vi gir tallene navn $x$ og $y$, og har da at $x + y = 200$. Det gir oss $y = 200 - x$.
- Funksjonen vi skal maksimere er $f(x) = x \cdot y = x \cdot (200 - x) = 200x - x^2$.
- Vi finner toppunkt ved å derivere, og sette deriverte lik null.

$$f'(x) = 0 \iff 200 - 2x = 0 \iff 100 = x.$$

- Det høyeste produktet er derfor når $x = 100$, som gir oss $y = 100$, og $x \cdot y = 10000$.

# Optimering, eksempel II

## Oppgave

Regnmengden i mm et døgn er gitt ved $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
Her er $t$ målt i timer, så $t \in [0, 24]$.

1. Finn når på døgnet det var mest nedbør.
2. Finn når på døgnet det var minst nedbør.
3. Finn når på døgnet nedbørsmengden endret seg mest.

# Optimering, eksempel II

## Oppgave

Regnmengden i mm et døgn er gitt ved $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$. Her er $t$ målt i timer, så $t \in [0, 24]$.

1. Finn når på døgnet det var mest nedbør.
2. Finn når på døgnet det var minst nedbør.
3. Finn når på døgnet nedbørsmengden endret seg mest.

- Siden vi både skal optimere mengden nedbør og endringen i nedbør, trenger vi både $r'(t)$ og $r''(t)$.

# Optimering, eksempel II

## Oppgave

Regnmengden i mm et døgn er gitt ved $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
Her er $t$ målt i timer, så $t \in [0, 24]$.

1. Finn når på døgnet det var mest nedbør.
2. Finn når på døgnet det var minst nedbør.
3. Finn når på døgnet nedbørsmengden endret seg mest.

- Siden vi både skal optimere mengden nedbør og endringen i nedbør, trenger vi både $r'(t)$ og $r''(t)$.
- Vi begynner utregningen på neste side.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.
- Vi har derfor $t = 0$, $t = 12$, $t = 22$, og $t = 24$ å sjekke.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.
- Vi har derfor $t = 0$, $t = 12$, $t = 22$, og $t = 24$ å sjekke.
- Vi setter inn og får

$$r(0) = 2,$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.
- Vi har derfor $t = 0$, $t = 12$, $t = 22$, og $t = 24$ å sjekke.
- Vi setter inn og får

$$\begin{aligned} r(0) &= 2, \\ r(12) &= 5{,}888, \end{aligned}$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.
- Vi har derfor $t = 0$, $t = 12$, $t = 22$, og $t = 24$ å sjekke.
- Vi setter inn og får

$$r(0) = 2, \qquad r(22) = 5{,}388,$$
$$r(12) = 5{,}888,$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \vee t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.
- Vi har derfor $t = 0$, $t = 12$, $t = 22$, og $t = 24$ å sjekke.
- Vi setter inn og får

$$\begin{aligned} r(0) &= 2, & r(22) &= 5{,}388, \\ r(12) &= 5{,}888, & r(24) &= 5{,}456. \end{aligned}$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r(t) = 0{,}001t^3 - 0{,}051t^2 + 0{,}792t + 2$.
- Vi skal finne ekstremalpunkter, og setter derfor den deriverte lik null.

$$r'(t) = 0 \iff 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792 = 0 \iff t = 12 \lor t = 22.$$

- Vi må også sjekke om endepunktene kan være rett svar.
- Vi har derfor $t = 0$, $t = 12$, $t = 22$, og $t = 24$ å sjekke.
- Vi setter inn og får

$$r(0) = 2, \qquad r(22) = 5{,}388,$$
$$r(12) = 5{,}888, \qquad r(24) = 5{,}456.$$

- Det var derfor mest nedbør ved $t = 12$ og minst nedbør ved $t = 0$.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0 \iff t = 17.$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0 \iff t = 17.$$

- Igjen må vi også sjekke endepunktene. Vi får

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0 \iff t = 17.$$

- Igjen må vi også sjekke endepunktene. Vi får

$$r'(0) = 0{,}792,$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0 \iff t = 17.$$

- Igjen må vi også sjekke endepunktene. Vi får

$$r'(0) = 0{,}792,$$
$$r'(17) = -0{,}075,$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0 \iff t = 17.$$

- Igjen må vi også sjekke endepunktene. Vi får

$$\begin{aligned} r'(0) &= 0{,}792, \\ r'(17) &= -0{,}075, \\ r'(24) &= 0{,}126. \end{aligned}$$

# Optimering, eksempel II

- Vi har $r'(t) = 0{,}003t^2 - 0{,}102t + 0{,}792$.
- Vi skulle også finne når nedbørsmengden endret seg mest.
- Vi vil finne ekstremalpunkt til den deriverte.
- Vi vil derfor finne når den dobbelderiverte er null, og får

$$r''(t) = 0 \iff 0{,}006t - 0{,}102 = 0 \iff t = 17.$$

- Igjen må vi også sjekke endepunktene. Vi får

$$\begin{aligned} r'(0) &= 0{,}792, \\ r'(17) &= -0{,}075, \\ r'(24) &= 0{,}126. \end{aligned}$$

- Den største endringen i nedbør er derfor når $t = 0$.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET