Krumning og vendepunkter

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Krumning og vendepunkter

1 Funksjonsdrøfting

2 **Krumning og vendepunkter**

- Høyeregradsderiverte
- Krumning

Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ får vi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ får vi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- Vi kan derivere på nytt, og får

$$f''(x) = 6x - 4.$$

Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ får vi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- Vi kan derivere på nytt, og får

$$f''(x) = 6x - 4.$$

- Funksjonen $f''(x)$ kalles den andrederiverte til f.

Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ får vi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- Vi kan derivere på nytt, og får

$$f''(x) = 6x - 4.$$

- Funksjonen $f''(x)$ kalles den andrederiverte til f.
- Vi kan også finne den tredjederiverte $f'''(x)$.

Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ får vi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- Vi kan derivere på nytt, og får

$$f''(x) = 6x - 4.$$

- Funksjonen $f''(x)$ kalles den andrederiverte til f.
- Vi kan også finne den tredjederiverte $f'''(x)$.
- Etter tredjederiverte, gidder vi ikke lenger skrive fnutter, og får

$$f^{(4)}(x), \quad f^{(5)}(x), \quad \ldots$$

Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ får vi $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
- Vi kan derivere på nytt, og får

$$f''(x) = 6x - 4.$$

- Funksjonen $f''(x)$ kalles den andrederiverte til f.
- Vi kan også finne den tredjederiverte $f'''(x)$.
- Etter tredjederiverte, gidder vi ikke lenger skrive fnutter, og får

$$f^{(4)}(x), \quad f^{(5)}(x), \quad \dots$$

- Merk parentesen rundt tallet!

Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.

Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.
- Vi skriver

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \qquad f'''(x)\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \qquad \ldots$$

Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.
- Vi skriver
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \qquad f'''(x)\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \qquad \dots$$
- Merk at over brøkstreken opphøyer vi d, og under brøkstreken opphøyer vi dx.

Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.
- Vi skriver

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \qquad f'''(x)\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \qquad \ldots$$

- Merk at over brøkstreken opphøyer vi d, og under brøkstreken opphøyer vi dx.
- Idéen er at vi kan skrive

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right).$$

Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.
- Vi skriver
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \qquad f'''(x)\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \qquad \ldots$$
- Merk at over brøkstreken opphøyer vi d, og under brøkstreken opphøyer vi dx.
- Idéen er at vi kan skrive
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right).$$
- Merk at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ betyr «Deriver funksjonen som kommer etter.»

Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.
- Vi skriver
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \qquad f'''(x)\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \qquad \ldots$$
- Merk at over brøkstreken opphøyer vi d, og under brøkstreken opphøyer vi dx.
- Idéen er at vi kan skrive
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right).$$
- Merk at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ betyr «Deriver funksjonen som kommer etter.»
- Vi kan derfor skrive
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 - 3x + 2\right) = (x^2 - 3x + 2)'$$

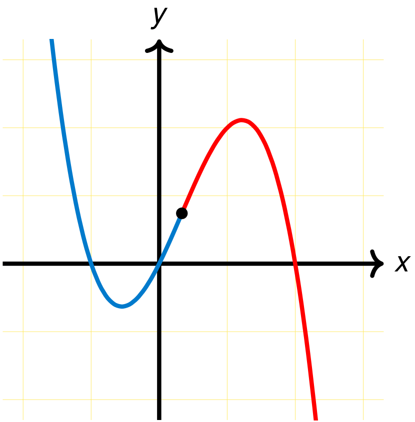
Krumning og vendepunkter

1 Funksjonsdrøfting

2 **Krumning og vendepunkter**

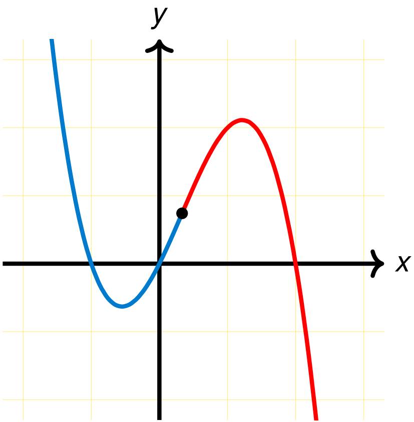
- Høyeregradsderiverte
- Krumning

Krumning



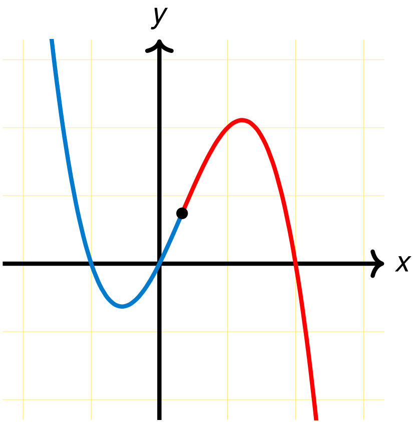
- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.

Krumning



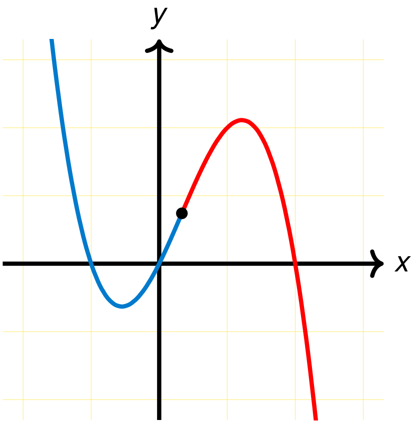
- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.

Krumning



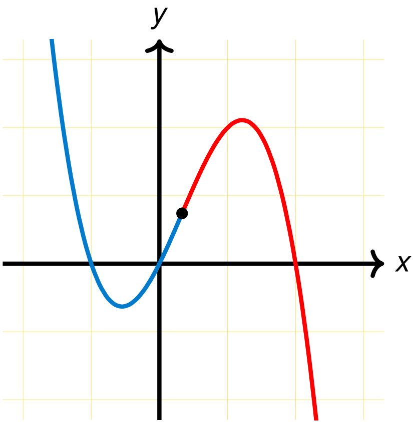
- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.
- Grafen vender den hule siden ned når $x > \frac{1}{3}$.

Krumning



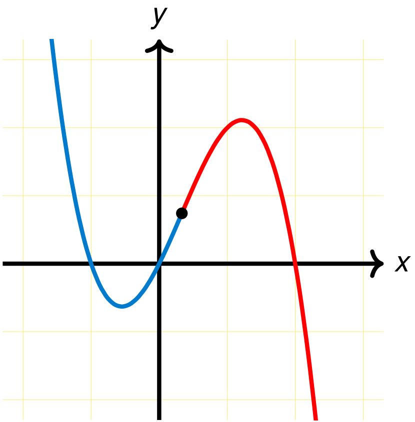
- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.
- Grafen vender den hule siden ned når $x > \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har negativ krumning.

Krumning



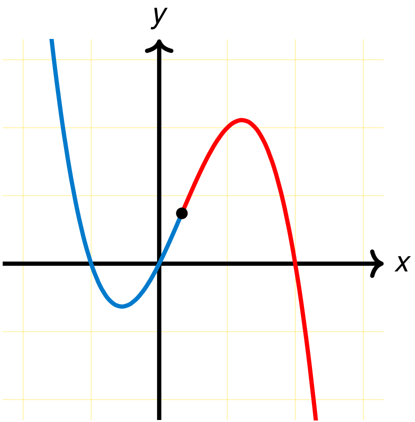
- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.
- Grafen vender den hule siden ned når $x > \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har negativ krumning.
- Punktet hvor vi bytter fra positiv til negativ krumning kalles et vendepunkt.

Krumning



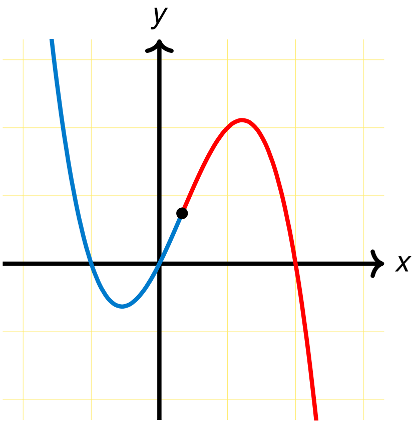
- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.
- Grafen vender den hule siden ned når $x > \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har negativ krumning.
- Punktet hvor vi bytter fra positiv til negativ krumning kalles et vendepunkt.
- Der grafen har positiv krumning ser vi at vekstfarten øker.

Krumning



- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.
- Grafen vender den hule siden ned når $x > \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har negativ krumning.
- Punktet hvor vi bytter fra positiv til negativ krumning kalles et vendepunkt.
- Der grafen har positiv krumning ser vi at vekstfarten øker.
- Der grafen har negativ krumning ser vi at vekstfarten minker.

Krumning



- Grafen vender den hule siden opp når $x < \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har positiv krumning.
- Grafen vender den hule siden ned når $x > \frac{1}{3}$.
- Vi sier at grafen har negativ krumning.
- Punktet hvor vi bytter fra positiv til negativ krumning kalles et vendepunkt.
- Der grafen har positiv krumning ser vi at vekstfarten øker.
- Der grafen har negativ krumning ser vi at vekstfarten minker.
- Vi kan derfor finne krumningen ved å se på den deriverte.

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er negativ.

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er negativ.
- Vi kan finne vendepunktet ved å se hvor den dobbelderiverte skifter fortegn.

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er negativ.
- Vi kan finne vendepunktet ved å se hvor den dobbelderiverte skifter fortegn.
- Det er typisk der den dobbelderiverte er null.

Krumning og dobbelderivert

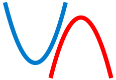
- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er negativ.
- Vi kan finne vendepunktet ved å se hvor den dobbelderiverte skifter fortegn.
- Det er typisk der den dobbelderiverte er null.
- For å huske hvordan positiv/negativ krumning ser ut, har vi denne huskeregelen:

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er negativ.
- Vi kan finne vendepunktet ved å se hvor den dobbelderiverte skifter fortegn.
- Det er typisk der den dobbelderiverte er null.
- For å huske hvordan positiv/negativ krumning ser ut, har vi denne huskeregelen:
  - Positiv krumning gir blid graf: ☺

Krumning og dobbelderivert

- Positiv krumning er der den deriverte øker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er positiv.
- Negativ krumning er der den deriverte synker.
- Det betyr at den dobbelderiverte er negativ.
- Vi kan finne vendepunktet ved å se hvor den dobbelderiverte skifter fortegn.
- Det er typisk der den dobbelderiverte er null.
- For å huske hvordan positiv/negativ krumning ser ut, har vi denne huskeregelen:
  - Positiv krumning gir blid graf: ☺
  - Negativ krumning gir sur graf: ☹



Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi begynner med å dobbelderivere funksjonen.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$$

Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi begynner med å dobbelderivere funksjonen.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$$

- Vi løser $f''(x) = 0$ og får $x = 1$ og $x = -2$.

Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi begynner med å dobbelderivere funksjonen.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x + 4 \\
f''(x) &= 12x^2 + 12x - 24
\end{aligned}
$$

- Vi løser $f''(x) = 0$ og får $x = 1$ og $x = -2$.
- Vi må sjekke at den dobbelderiverte bytter fortegn i disse punktene.

Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi begynner med å dobbelderivere funksjonen.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 4$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$$

- Vi løser $f''(x) = 0$ og får $x = 1$ og $x = -2$.
- Vi må sjekke at den dobbelderiverte bytter fortegn i disse punktene.
- Vi kan tegne en fortegnslinje.

Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

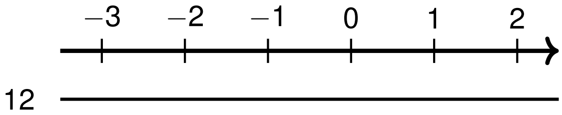
- Vi fant $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x-1)(x+2)$, og tegner fortegnslinje:

Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi fant $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x-1)(x+2)$, og tegner fortegnslinje:

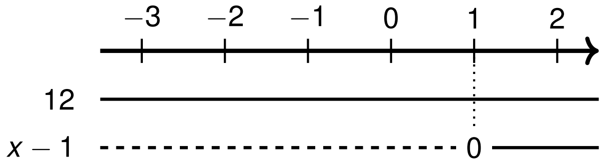


Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi fant $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x-1)(x+2)$, og tegner fortegnslinje:

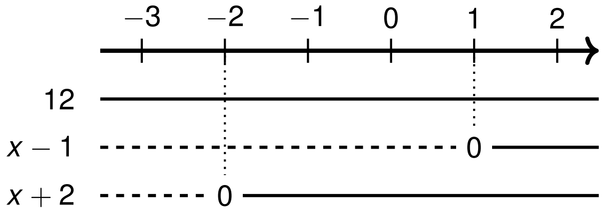


Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi fant $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x-1)(x+2)$, og tegner fortegnslinje:

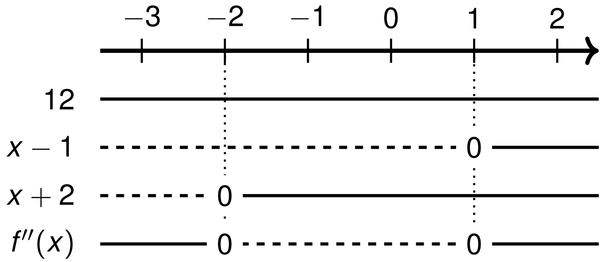


Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi fant $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x-1)(x+2)$, og tegner fortegnslinje:

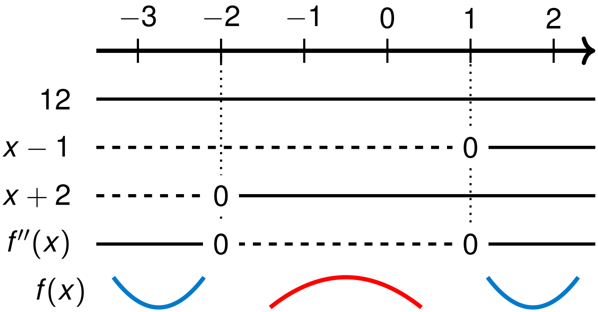


Vendepunkt, eksempel

Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$.

- Vi fant $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x-1)(x+2)$, og tegner fortegnslinje:



Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.
- Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ har vendepunkter når $x = -2$ og $x = 1$.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.
- Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ har vendepunkter når $x = -2$ og $x = 1$.
- Vi ser også at dersom $f(x)$ har et ekstremalpunkt med $x < -2$ eller $x > 1$, må det være et bunnpunkt.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.
- Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ har vendepunkter når $x = -2$ og $x = 1$.
- Vi ser også at dersom $f(x)$ har et ekstremalpunkt med $x < -2$ eller $x > 1$, må det være et bunnpunkt.
- Og et ekstremalpunkt på $\langle -2, 1 \rangle$ må være et toppunkt.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.
- Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ har vendepunkter når $x = -2$ og $x = 1$.
- Vi ser også at dersom $f(x)$ har et ekstremalpunkt med $x < -2$ eller $x > 1$, må det være et bunnpunkt.
- Og et ekstremalpunkt på $\langle -2, 1 \rangle$ må være et toppunkt.
- Generelt har vi:

Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en representant for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.
- Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ har vendepunkter når $x = -2$ og $x = 1$.
- Vi ser også at dersom $f(x)$ har et ekstremalpunkt med $x < -2$ eller $x > 1$, må det være et bunnpunkt.
- Og et ekstremalpunkt på $\langle -2, 1 \rangle$ må være et toppunkt.
- Generelt har vi:

Regel

Dersom $f'(a) = 0$ og $f''(a) < 0$ har funksjonen et toppunkt i $x = a$.
Dersom $f'(a) = 0$ og $f''(a) > 0$ har funksjonen et bunnpunkt i $x = a$.
Dersom $f''(a) = 0$ kan funksjonen ha toppunkt, bunnpunkt, eller terrassepunkt.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$.

- Vi deriverer og får $f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$.

- Vi deriverer og får $f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$.
- Vi løser $f'(x) = 0$ og får $x = 5$ og $x = 7$.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$.

- Vi deriverer og får $f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$.
- Vi løser $f'(x) = 0$ og får $x = 5$ og $x = 7$.
- Vi dobbelderiverer og får $f''(x) = -6x + 36$.

Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$.

- Vi deriverer og får $f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$.
- Vi løser $f'(x) = 0$ og får $x = 5$ og $x = 7$.
- Vi dobbelderiverer og får $f''(x) = -6x + 36$.
- Setter vi inn $x = 5$ og $x = 7$ får vi

$$f''(5) = 6 \quad \text{og} \quad f''(7) = -6.$$

Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$.

- Vi deriverer og får $f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$.
- Vi løser $f'(x) = 0$ og får $x = 5$ og $x = 7$.
- Vi dobbelderiverer og får $f''(x) = -6x + 36$.
- Setter vi inn $x = 5$ og $x = 7$ får vi

$$f''(5) = 6 \quad \text{og} \quad f''(7) = -6.$$

- Vi har derfor at $x = 5$ gir et bunnpunkt og $x = 7$ gir et toppunkt.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET