Funksjonsdrøfting

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

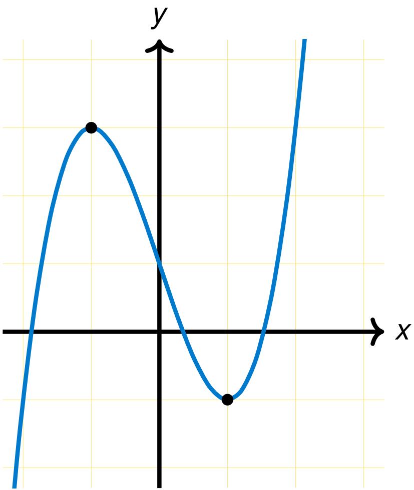
1 Funksjonsdrøfting

- Ekstremalpunkter
- Stasjonære punkter

2 Krumning og vendepunkter

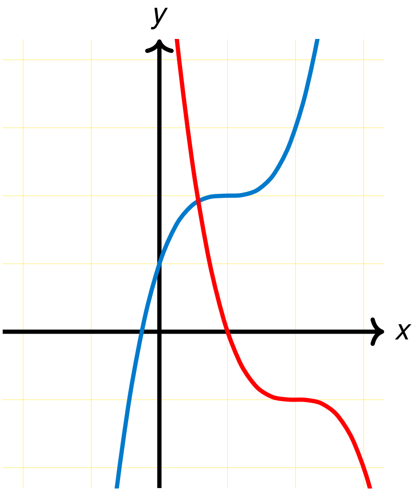
Ekstremalpunkter

Topp- og bunnpunkter



- Et toppunkt er et punkt som er høyere enn punktene rundt.
- Et bunnpunkt er et punkt som er lavere enn punktene rundt.
- Funksjonsverdien til et toppunkt kalles en maksimalverdi, og funksjonsverdien til et bunnpunkt kalles en minimalverdi.
- Maksimal/minimalverdien trenger ikke være den største/minste verdien funksjonen kan ha.
- Vi bruker fellesbetegnelsen ekstremalpunkt for topp- og bunnpunkter.

Monotone funksjoner



- En funksjon er voksende dersom den hele tiden blir større.
- Matematisk kan vi skrive

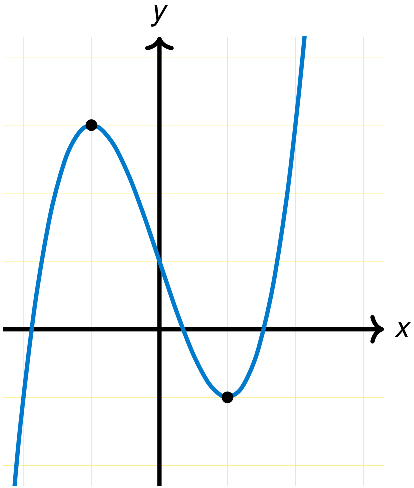
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

- En funksjon er synkende dersom den hele tiden blir mindre.
- Matamatisk kan vi skrive

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

- Dersom en funksjon er voksende eller synkende, sier vi at den er monoton.

Monotoniegenskaper



- Monotoniegenskapene til en funksjon består av:
  - Hvor er funksjonen voksende.
  - Hvor er funksjonene synkende.
- Funksjonen til venstre er synkende på $\langle -1, 1 \rangle$.
- Den er voksende på $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ og på $\langle 1, \rightarrow \rangle$.
- Vi kan finne monotoniegenskapene ved hjelp av den deriverte.
- Der den deriverte er positiv er funksjonen voksende
- Der den deriverte er negativ er funksjonen synkende.

Stasjonære punkter

Derivert lik null

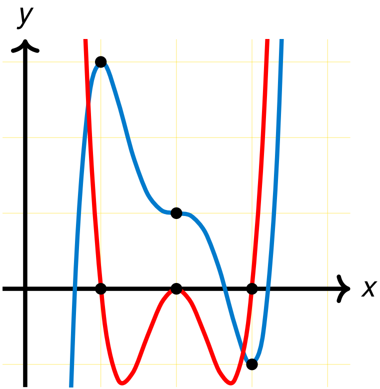
- Hvis en kontinuerlig funksjon går fra voksende til synkende, har vi et toppunkt.
- Hvis en kontinuerlig funksjon går fra synkelde til voksende, har vi et bunnpunkt.
- Om funksjonen bytter monotoniegenskap, så bytter den deriverte fortegn.

Regel

Hvis f er kontinuerlig og $f'(x)$ bytter fortegn i et punkt, er punktet et ekstremalpunkt.

- Siden vi vil vite når den deriverte bytter fortegn, må vi se på hvor den deriverte er null.
- Punktene med $f'(x) = 0$ kalles stasjonære punkter.

Stasjonære punkter



- Vi ser på tre typer stasjonære punkt.
- Toppunkt, der den deriverte går fra positiv til negativ.
- Terassepunkt, der den deriverte ikke skifter fortegn.
- Bunnpunkt, der den deriverte går fra negativ til positiv.
- Vi kan også tegne grafen til den deriverte for å finne nullpunktene.
- Vi kommer også til å tegne fortegnslinjer.

Stasjonære punkt, eksempel

Oppgave

Finn topp- og bunnpunkter til $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$.

- Vi deriverer funksjonen og finner

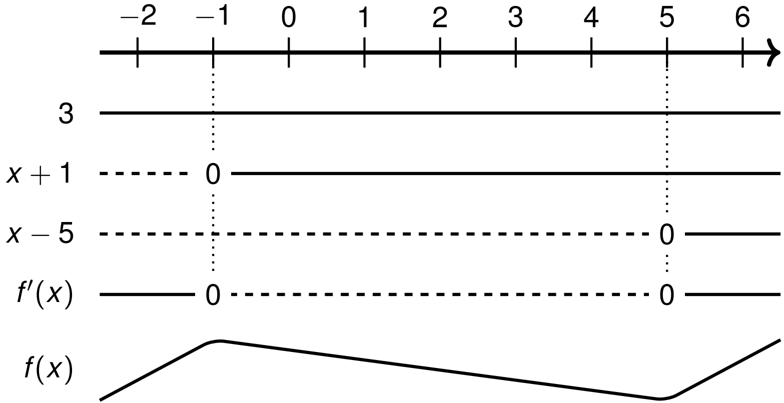
$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15.$$

- Vi løser $f'(x) = 0$ og får løsningene $x = -1$ og $x = 5$.
- For å finne ut hvilket av disse som er toppunkt og hvilket som er bunnpunkt, lager vi en fortegnslinje for $f'(x)$.
- Da faktoriserer vi først $f'(x)$, og får

$$f'(x) = 3(x - 5)(x + 1).$$

Stasjonære punkt, eksempel

Vi tegner fortegnslinje:



Vi har tegnet en representasjon av grafen, for å vise hvor den vokser og synker.
Funksjonen har toppunkt i $x = -1$ og bunnpunkt i $x = 5$.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET