Derivasjon

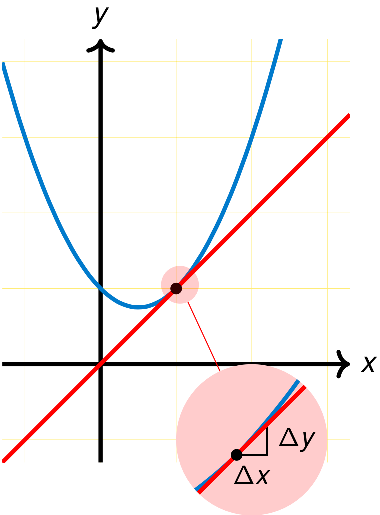
Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Derivasjon

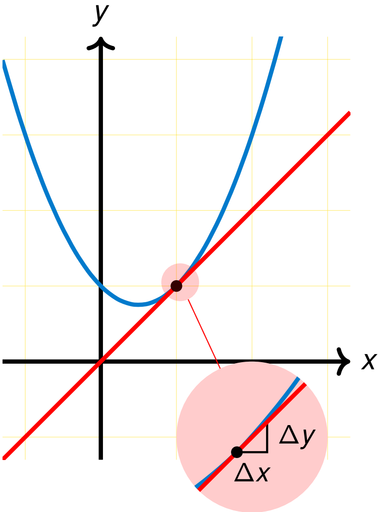
Tolkning av derivert



- Vi definerte den deriverte til f som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Tolkning av derivert

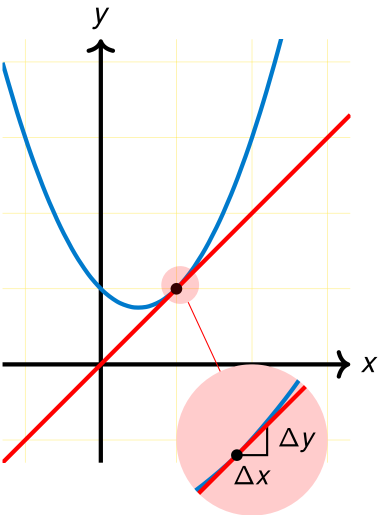


- Vi definerte den deriverte til f som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Vi kom frem til formelen ved å se på momentan vekstfart til funksjonen.

Tolkning av derivert

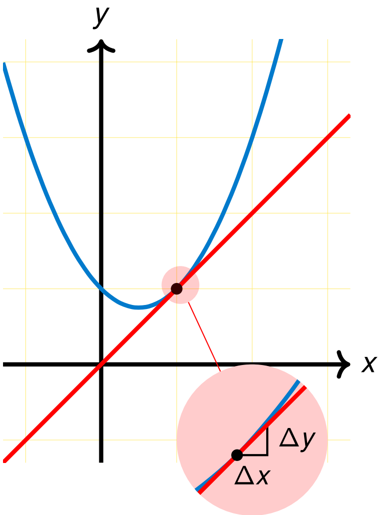


- Vi definerte den deriverte til f som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Vi kom frem til formelen ved å se på momentan vekstfart til funksjonen.
- Vi kan også tolke det som stigningstallet til tangenten.

Tolkning av derivert

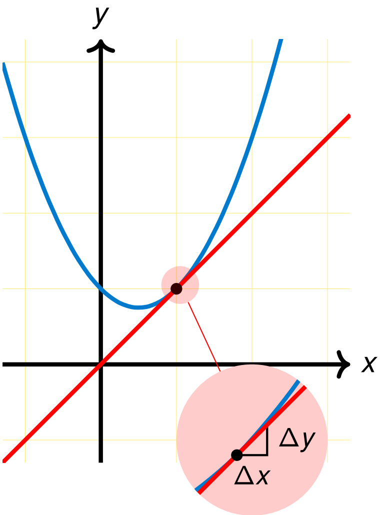


- Vi definerte den deriverte til f som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Vi kom frem til formelen ved å se på momentan vekstfart til funksjonen.
- Vi kan også tolke det som stigningstallet til tangenten.
- Tangenten er den linja som likner mest på grafen i et punkt.

Tolkning av derivert



- Vi definerte den deriverte til f som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Vi kom frem til formelen ved å se på momentan vekstfart til funksjonen.
- Vi kan også tolke det som stigningstallet til tangenten.
- Tangenten er den linja som likner mest på grafen i et punkt.
- Vi skal lære å finne likningen for tangenten i slutten av uka.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den momentane vekstfarten er derfor også 3 for alle x.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den momentane vekstfarten er derfor også 3 for alle x.
- Alternativt: Tangenten til ei linje er linja selv.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den momentane vekstfarten er derfor også 3 for alle x.
- Alternativt: Tangenten til ei linje er linja selv.
- Den deriverte til linja $f(x) = ax + b$ vil derfor være $f'(x) = a$.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den momentane vekstfarten er derfor også 3 for alle x.
- Alternativt: Tangenten til ei linje er linja selv.
- Den deriverte til linja $f(x) = ax + b$ vil derfor være $f'(x) = a$.
- Om vi setter $a = 0$ får vi også at den deriverte til $f(x) = b$ er $f'(x) = 0$.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den momentane vekstfarten er derfor også 3 for alle x.
- Alternativt: Tangenten til ei linje er linja selv.
- Den deriverte til linja $f(x) = ax + b$ vil derfor være $f'(x) = a$.
- Om vi setter $a = 0$ får vi også at den deriverte til $f(x) = b$ er $f'(x) = 0$.
- Dette gir oss våre to første derivasjonsregler.

Derivert til linje

- Stigningstallet til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den momentane vekstfarten er derfor også 3 for alle x.
- Alternativt: Tangenten til ei linje er linja selv.
- Den deriverte til linja $f(x) = ax + b$ vil derfor være $f'(x) = a$.
- Om vi setter $a = 0$ får vi også at den deriverte til $f(x) = b$ er $f'(x) = 0$.
- Dette gir oss våre to første derivasjonsregler.

Regel

- *Den deriverte til funksjonen $f(x) = k$ er $f'(x) = 0$.*
- *Den deriverte til funksjonen $f(x) = ax + b$ er $f'(x) = a$.*

Derivasjon

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x)$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x
\end{aligned}
$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x.
\end{aligned}
$$

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x.
\end{aligned}
$$

- Vi har funnet:

$$
\begin{aligned}
(1)' &= 0 \\
(x)' &= 1 \\
\left(x^2\right)' &= 2x
\end{aligned}
$$

OSLOMET

Derivasjon av potens

- De tre reglene

$$(1)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad \left(x^2\right)' = 2x$$

er tre spesialtilfeller av en generell regel:

Derivasjon av potens

- De tre reglene
$$(1)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad \left(x^2\right)' = 2x$$
er tre spesialtilfeller av en generell regel:

Regel

For potenser er den deriverte gitt ved
$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Derivasjon av potens

- De tre reglene

$$(1)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad \left(x^2\right)' = 2x$$

  er tre spesialtilfeller av en generell regel:

Regel

For potenser er den deriverte gitt ved

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

- Huskeregelen er «Sett eksponenten foran og gjør den én mindre.»

Derivasjon av potens

- De tre reglene
$$(1)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad \left(x^2\right)' = 2x$$
er tre spesialtilfeller av en generell regel:

Regel

For potenser er den deriverte gitt ved

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

- Huskeregelen er «Sett eksponenten foran og gjør den én mindre.»
- Eksempler:
$$\left(x^7\right)' = 7x^6 \qquad \left(x^4\right)' = 4x^3 \qquad \left(x^2\right)' = 2x^1 \qquad \left(x^1\right)' = 1x^0 = 1.$$

Addisjon og konstant

- Det er kun to regler til vi trenger for å raskt kunne derivere alle polynom:

Addisjon og konstant

- Det er kun to regler til vi trenger for å raskt kunne derivere alle polynom:

Regel

For funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og konstant k har vi:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \qquad \text{og} \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Addisjon og konstant

- Det er kun to regler til vi trenger for å raskt kunne derivere alle polynom:

Regel

For funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og konstant k har vi:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \qquad og \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

- Sagt på en annen måte: tall kan settes utenfor derivasjonen, og sum kan deriveres ledd for ledd.

Addisjon og konstant

- Det er kun to regler til vi trenger for å raskt kunne derivere alle polynom:

Regel

For funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og konstant k har vi:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \qquad og \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

- Sagt på en annen måte: tall kan settes utenfor derivasjonen, og sum kan deriveres ledd for ledd.
- Merk: Dette gjelder ikke for ganging,

$$(f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

Addisjon og konstant

- Det er kun to regler til vi trenger for å raskt kunne derivere alle polynom:

Regel

For funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og konstant k har vi:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \qquad og \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

- Sagt på en annen måte: tall kan settes utenfor derivasjonen, og sum kan deriveres ledd for ledd.
- Merk: Dette gjelder ikke for ganging,

$$(f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

- Vi har $(x)' = 1$ men $(x \cdot x)' = \left(x^2\right)' = 2x \neq 1 \cdot 1$.

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$f'(x)$$

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 2x - 7\right)'$$

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 - 3x^2 + 2x - 7\right)' \\ &= \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + (2x)' - (7)' \end{aligned}$$

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^3 - 3x^2 + 2x - 7\right)' \\
&= \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + (2x)' - (7)' \\
&= \left(x^3\right)' - 3 \cdot \left(x^2\right)' + 2 \cdot (x)' - 7 \cdot (1)'
\end{aligned}
$$

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 - 3x^2 + 2x - 7\right)' \\ &= \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + (2x)' - (7)' \\ &= \left(x^3\right)' - 3 \cdot \left(x^2\right)' + 2 \cdot (x)' - 7 \cdot (1)' \\ &= 3x^2 - 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot 0 \end{aligned}$$

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 - 3x^2 + 2x - 7\right)' \\ &= \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + (2x)' - (7)' \\ &= \left(x^3\right)' - 3 \cdot \left(x^2\right)' + 2 \cdot (x)' - 7 \cdot (1)' \\ &= 3x^2 - 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot 0 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^3 - 3x^2 + 2x - 7\right)' \\
&= \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + (2x)' - (7)' \\
&= \left(x^3\right)' - 3 \cdot \left(x^2\right)' + 2 \cdot (x)' - 7 \cdot (1)' \\
&= 3x^2 - 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot 0 \\
f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2.
\end{aligned}
$$

Vi kan derivere alle polynom på tilsvarende måte.

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.
- Og derfor

$$f'(x)$$

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.
- Og derfor

$$f'(x) = \left(2x^2 + 3x - 2\right)'$$

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.
- Og derfor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^2 + 3x - 2\right)' \\ &= 2\left(x^2\right)' + 3(x)' - (2)' \end{aligned}$$

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.
- Og derfor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^2 + 3x - 2\right)' \\ &= 2\left(x^2\right)' + 3(x)' - (2)' \\ &= 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 \end{aligned}$$

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.
- Og derfor

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^2 + 3x - 2\right)' \\ &= 2\left(x^2\right)' + 3(x)' - (2)' \\ &= 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 \\ f'(x) &= 4x + 3. \end{aligned}$$

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET