Vekstfart

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

1 **Vekstfart**

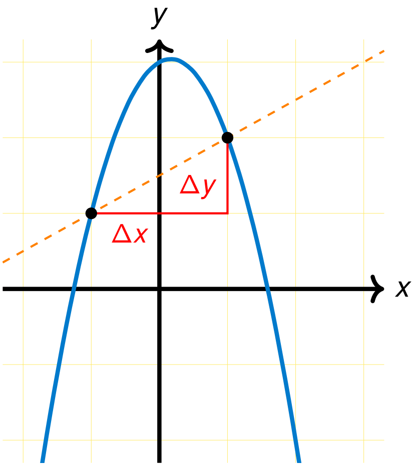
- Gjennomsnittlig vekstfart
- Momentan vekstfart

2 **Derivasjon**

3 **Potensfunksjoner og rotfunksjoner**

Gjennomsnittlig vekstfart

Vekst i periode



- Når grafen ikke er en linje, gir ikke stigningstall mening.
- Men vi kan finne gjennomsnittlig stigning mellom to punkt.
- Vi bruker samme formel som før:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- I eksempelet er den gjennomsnittlige vekstfarten fra $x = -1$ til $x = 1$ gitt ved

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Formel for gjennomsnittlig vekstfart

- Stigningstallet til linja gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er

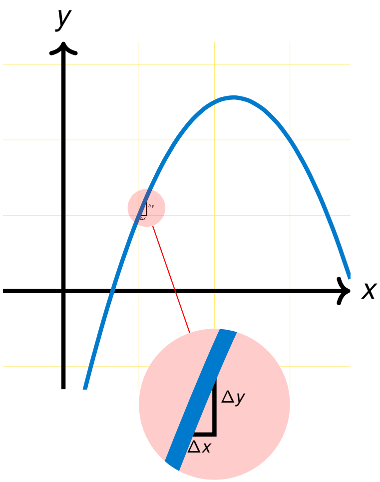
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- Når vi skal finne gjennomsnittlig vekstfart er punktene på grafen.
- Det betyr at $y_1 = f(x_1)$ og $y_2 = f(x_2)$.
- Formel for gjennomsnittlig vekstfart mellom $x = x_1$ og $x = x_2$ blir derfor

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Momentan vekstfart

Vekstfart i et punkt



- Vi er sjeldent interessert i stigningen over tid.
- Vi vil vite hva stigningen er nå.
- Vi finner den ved å ta et lite steg til siden.
- I tegningen til venstre prøver vi å finne vekstfarten når $x = 1$.
- Vi går et lite steg, $\Delta x = 0.1$ til siden, og får

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1.1) - f(1)}{0.1}.$$

- Dette tilnærmer den momentane vekstfarten.
- Jo mindre Δx er, jo bedre blir tilnærmingen.

Tilnærming til momentan vekstfart

Oppgave

Høyden til en stein som kastes er gitt ved $h(t) = -5t^2 + 20t$. Finn farten etter ett sekund.

- Vi vil finne hvor fort grafen vokser når $t = 1$. Vi vil derfor regne ut

$$\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

  når $t = 1$ og Δt er liten.
- Vi velger $\Delta t = 0{,}01$ og får:

$$\frac{h(1{,}01) - h(1)}{0{,}01} = \frac{15{,}0995 - 15}{0{,}01} = \frac{0{,}0995}{0{,}01} = 9{,}95.$$

Tilnærming til momentan vekstfart

- Vi fant på forrige side en tilnærming til farten.
- Vi brukte $\Delta t = 0{,}01$.
- Hvis vi bruker andre verdier for Δt, får vi litt andre svar

$$\Delta t = 0{,}1 \implies \frac{\Delta h}{\Delta t} = 9{,}5 \qquad \Delta t = -0{,}1 \implies \frac{\Delta h}{\Delta t} = 10{,}5$$

$$\Delta t = 0{,}01 \implies \frac{\Delta h}{\Delta t} = 9{,}95 \qquad \Delta t = -0{,}01 \implies \frac{\Delta h}{\Delta t} = 10{,}05$$

$$\Delta t = 0{,}001 \implies \frac{\Delta h}{\Delta t} = 9{,}995 \qquad \Delta t = -0{,}001 \implies \frac{\Delta h}{\Delta t} = 10{,}005$$

- Vi ser at vi nærmer oss 10 når Δt går mot 0.
- Vi har derfor at $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t} = 10$.

Momentan vekstfart og derivert

- Vi har sett at vi kan få den momentane vekstfarten ved å regne ut en grense.
- Vi har at den momentane vekstfarten til $f(x)$ når $x = a$ er gitt ved

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

- Vi kan lage oss en ny funksjon som gir ut vekstfarten for alle x-verdier.
- Denne funksjonen kaller vi den deriverte til $f(x)$, og vi skriver $f'(x)$.
- Vi har

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Deriverte, eksempel

Oppgave

Finn den deriverte til $f(x) = x^3 - 2$.

Vi får:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - 2 - (x^3 - 2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \cancel{2} - \cancel{x^3} + \cancel{2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \\
&= 3x^2 + 3 \cdot 0 + 0^2 = 3x^2. \\
f'(x) &= 3x^2.
\end{aligned}
$$

Deriverte uten funksjonsnavn

- Vi fant at $f'(x) = 3x^2$ når $f(x) = x^3 - 2$.
- Vi kan også skrive dette som $(x^3 - 2)' = 3x^2$.
- Dette gjør at vi ikke trenger å gi navn til en funksjon for å skrive ned den deriverte.
- Vi kan for eksempel skrive $(2x^2 - x)' = 4x - 1$.
- Vi slapp å skrive «Dersom $f(x) = 2x^2 - x$ blir $f'(x) = 4x - 1$.»
- Om vi har et uttrykk som $y = 3x + 2$ vil vi også skrive y' for «Den deriverte til funksjonen $f(x) = 3x + 2$.»
- Vi kan derfor skrive «Om $y = x^3 - 2$ er $y' = 3x^2$.»

Andre symboler for deriverte

Det er mange måter å skrive deriverte på.

- Den vanligste måten er å skrive den deriverte som $f'(x)$.
- Det er også vanlig å skrive $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
  - Denne skrivemåten minner oss om definisjonen, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
  - Den har også andre fordeler når vi kommer til integrasjon.
- I fysikk skriver man tidsderiverte, $f'(t)$, som $\dot{f}$. Dette var notasjonen Newton brukte.
- I senere mattekurs skal vi også skrive f_x for $f'(x)$. Dette brukes mest når funksjonen har flere variable.
- Noen skriver også bare en D foran, $\mathrm{D}f$.

Vi kommer til å bruke de to første måtene i dette kurset.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET