Horisontale asymptoter

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

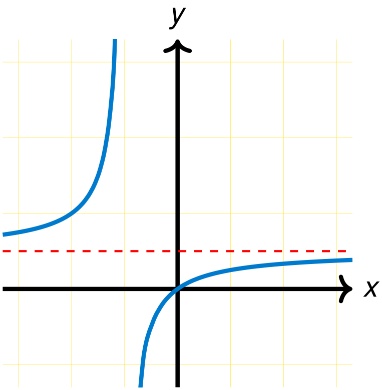
1 Vertikale asymptoter

2 Horisontale asymptoter

- Horisontal asymptote

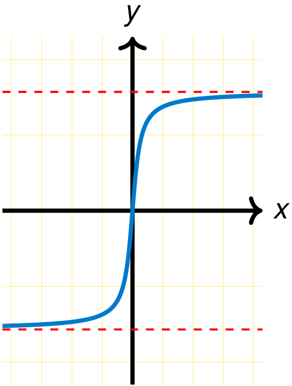
Horisontal asymptote

Horisontal asymptote



- En horisontal asymptote er den horisontale linja som grafen vil gå mot når x går mot uendelig.
- De fleste grafer har ikke horisontale asymptoter.
- Mange rasjonale funksjoner har.
- Vi skriver $\lim_{x \to \infty} f(x)$ for å se hva $f(x)$ går mot når x vokser og vokser.
- Vi skriver $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ for å se hva $f(x)$ går mot når x synker.
- Vi får ofte men ikke alltid samme svar i begge retninger.
- Alle rasjonale funksjoner gir samme svar i begge retninger.

Horisontale asymptoter



Definisjon

Funksjonen $f(x)$ har en horisontal asymptote i $y = b$ om

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

- En graf kan maksimalt ha to horisontale asymptoter.
- En i hver retning.
- Vi ser kun på grafer med en horisontal asymptote.
- Mer avanserte funksjoner må til for å få to.

Finne horisontale asymptoter

Det er to triks vi bruker for å finne horisontale asymptoter.

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. Vi kan dele teller og nevner på høyeste potens av x.

Eksempel

- Vi skal finne de horisontale asymptotene til $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{3x^2+x-7}$.
- Vi deler både teller og nevner på x^2 og får, når $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{x^2} - 2\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - 7\frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - 7\frac{1}{x^2}} \to \frac{1}{3}.$$

- Den horisontale asymptoten er derfor i $y = \frac{1}{3}$.

Forskjellig grad

- Om vi vil finne horisontal asymptote til $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-2}$ får vi

$$\frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 2\frac{x}{x^2} - 2\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + 2\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2}} \to \frac{0}{1} = 0.$$

- Dette skjer alltid om teller har lavere grad enn nevner.
- Vi får alltid $y = 0$ som horisontal asymptote.

Regel

Om $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ og $P(x)$ er et polynom av lavere grad enn $Q(x)$, har $f(x)$ horisontal asymptote i $y = 0$.

Forskjellig grad II

- Om vi vil finne horisontal asymptote til $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$ får vi

$$\frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 2\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \to \frac{1}{0}.$$

- Men å dele på 0 er ikke lov!
- Vi deler på mindre og mindre ting, så vi får $\lim_{x\to\infty}|f(x)| = \infty$.
- Vi har derfor ingen horisontal asymptote.
- Dette skjer alltid om teller har høyere grad enn nevner.

Regel

Om $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ og $P(x)$ er et polynom av høyere grad enn $Q(x)$, har $f(x)$ ingen horisontal asymptote.

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY

STORBYUNIVERSITETET