OSLOMET

Vertikale asymptoter

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

1. **Vertikale asymptoter**
   - Absoluttverdi
   - Uendelige grenser
   - Vertikale asymptoter

2. **Horisontale asymptoter**

Absoluttverdi

Absoluttverdi

- Tallene 2 og -2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».
- Vi skriver $|x|$ for «absoluttverdien til x».
- Vi får derfor $|-2| = 2$ og $|2| = 2$.
- Vi kan definere absoluttverdi ved hjelp av delt funksjonsuttrykk:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

- Men lettere å tenke på det som «bare fjern minustegnet».
- Absoluttverdien av et tall er aldri negativt (men $|0| = 0$).

Uendelige grenser

Grenser for rasjonale funksjoner

- Om vi skal regne ut $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$ kan vi bare sette inn $x = 1$ og få $\frac{0}{-2} = 0$.
- Om vi skal regne ut $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ kan vi ikke sette inn $x = 1$, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = x - 2$ og så sette inn $x = 1$.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$
\begin{aligned}
f(0{,}9) &= -29 & \qquad f(1{,}1) &= 31 \\
f(0{,}99) &= -299 & \qquad f(1{,}01) &= 301 \\
f(0{,}999) &= -2999 & \qquad f(1{,}001) &= 3001
\end{aligned}
$$

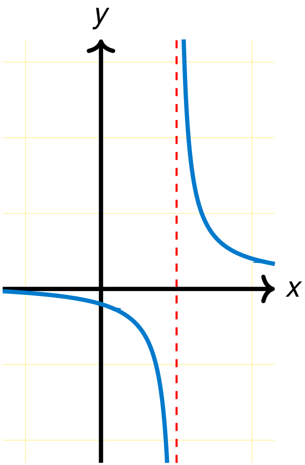
- Vi ser at svaret bare blir større og større (i absoluttverdi).

Uendelig

- Vi bruker symbolet ∞ for «uendelig».
- Hvis noe bare vokser og vokser og vokser sier vi at det går mot uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty.$$
- Om noe synker og synker og synker, sier vi at det går mot negativ uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$
- Vi kan da skrive
$$\lim_{x \to 1} |f(x)| = \infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty.$$

Vertikale asymptoter

Vertikale asymptoter



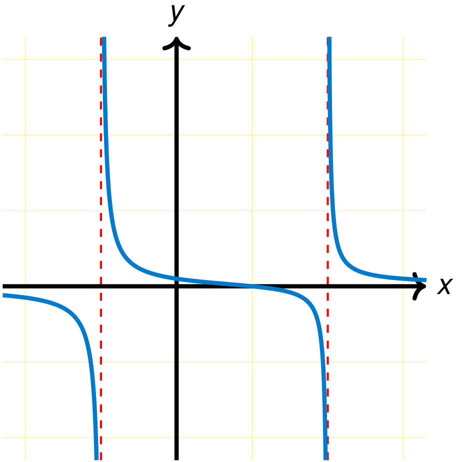
- Hvis vi tegner grafen til $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.
- Vi ser at grafen nærmer seg linja $x = 2$ uten å treffe.
- Dette kaller vi en vertikal asymptote
- Asymptotisk betyr «ikke sammenfallende».
- Betyr at grafen likner mer og mer på linja jo nærmere vi kommer, men treffer den aldri.

Definisjon

Funksjonen $f(x)$ har en vertikal asymptote i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$

Finne asymptoter



- Vi finner vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner ved å se hvor vi deler på 0.
- Om $\frac{P(x)}{Q(x)}$ er forkortet mest mulig, er de vertikale asymptotene der $Q(a) = 0$.
- Husk å forkorte brøken først.
- Om $P(a)$ også er 0 kan brøken forkortes.
- En funksjon kan godt ha mer enn én asymptote.

Finne asymptoter, eksempel

Oppgave

Finn alle vertikale asymptoter til $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-2}$.

- Vi må se når $x^2 - x - 2 = 0$.
- Vi løser denne og får $x = 2$ og $x = -1$.
- Vi kan derfor skrive om

$$f(x) = \frac{\cancel{x+1}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{x-2}.$$

- Kun $x = 2$ er en vertikal asymptote.

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY

STORBYUNIVERSITETET