Irrasjonale likninger

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Implikasjonspiler

Logiske symboler

- Vi har tidligere lært to logiske symboler:

  $\vee$, eller $A \vee B$ betyr «A er sann eller B er sann (eller begge er sanne).»

  $\wedge$, og $A \wedge B$ betyr «Både A og B er sanne.»

- Vi skal nå lære et nytt symbol:

  $\Longrightarrow$, impliserer $A \Longrightarrow B$ betyr «Hvis A er sann, må B også være sann.»

  - Vi kan også si «A medfører B» eller «A impliserer B».
  - Symbolet $\Longrightarrow$ kalles en implikasjonspil
- Vi kan også skrive pilen andre veien, hvis B medfører A: $A \Longleftarrow B$.
- Hvis vi har både $A \Longrightarrow B$ og $A \Longleftarrow B$, skriver vi $A \Longleftrightarrow B$, og sier at A og B er ekvivalente.
- Det betyr «A er sann hvis og bare hvis B er sann.»

Implikasjonspiler i dagligtale

- «Det har regnet, så det er glatt på veien!»
- Med implikasjonspil: «Det har regnet» $\implies$ «Det er glatt på veien».
- Implikasjonspilen brukes om den generelle påstanden om at når det regner blir det glatt på veien.
- Den originale setningen forteller oss også at det nettopp har regnet.
- Og konkluderer med at det derfor er glatt på veien.
- Den motsatte implikasjonen trenger ikke gjelde.
- «Det er glatt på veien, så det må ha regnet!»
- Det kan for eksempel ha snødd.

Falsk ekvivalens

False equivalence

Jesus Christ — Adolf Hitler

They both have mustaches, but that does not make them the same

- Falsk ekvivalens er når $A \implies C$ og $B \implies C$, og du derfor påstår at $A \iff B$.
- Wikipedias eksempel:
  - «Er Jesus» $\implies$ «Har bart»
  - «Er Hitler» $\implies$ «Har bart»
  - Derfor «Er Jesus» $\iff$ «Er Hitler».
- Eksempel fra «Erasmus Montanus»:
  - «En sten kan ikke fly.»
  - «Morlille kan ikke fly.»
  - Derfor «Morlille er en sten.»
- I virkeligheten er ofte situasjonen mer avansert.
- Det er da vanskeligere å legge merke til en falsk ekvivalens.

Implikasjonspiler, eksempel, plussing

- Vi har $x = 3 \implies x + 2 = 5$. Hvis x er 3 må $x + 2$ være 5.
- Vi har også $x + 2 = 5 \implies x = 3$. Hvis $x + 2$ er 5, må $x = 3$.
- Vi kan derfor skrive $x = 3 \iff x + 2 = 5$.
- Det er ingenting spesielt med tallene 3 og 5, og vi kan skrive

$$a + c = b + c \iff a = b.$$

- Dette er en av reglene vi bruker når vi løser likninger.
- Den forteller oss at likningen er like sann dersom vi plusser på det samme på begge sider.

Implikasjonspiler, eksempel, ganging

- Vi har $x = 7 \implies 2x = 14$. Hvis x er 7 må $2x$ være 14.
- Vi har også $2x = 14 \implies x = 7$. Hvis $2x$ er 14, må $x = 7$.
- Denne regelen bruker vi også når vi løser likninger. Likningen er like sann dersom vi ganger med det samme på begge sider.
- Det er ikke helt likegyldig hva vi ganger med, derimot.
- Vi har $x = 7 \implies 0x = 0$, men $0x = 0 \not\implies x = 7$.
- Regelen er, dersom $c \neq 0$:

$$a \cdot c = b \cdot c \iff a = b.$$

- I rasjonale likninger kan vi få falske løsninger fordi vi ganger med et uttrykk som er lik 0.

Likninger med flere løsninger

- Vi har $x = 2 \implies x^2 = 4$. Hvis $x = 2$ må x^2 være 4.
- Vi har ikke $x^2 = 4 \implies x = 2$. Dersom $x^2 = 4$ kan $x = -2$.
- For likninger med flere løsninger bruker vi «eller, $\vee$» for å lage ekvivalens.
- Vi har
$$x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2.$$
- Hvis $x^2 = 4$ må $x = 2$ eller $x = -2$.
- Og hvis $x = 2$ eller $x = -2$ må $x^2 = 4$.
- Vi har
$$a = b \implies a^2 = b^2$$
og
$$a = \pm b \iff a^2 = b^2.$$

Irrasjonale likninger

Irrasjonale likninger

Definisjon

En irrasjonal likning er en likning hvor den ukjente er under et rottegn.

Eksempler:

- Likningen $\sqrt{3x-3} = 2x + 1$ er en irrasjonal likning.
- Likningen $\sqrt[3]{x} = 2$ er en irrasjonal likning.
- Likningen $x^2 - 2x = \sqrt{3}$ er ikke en irrasjonal likning.

Løse irrasjonale likninger

- For å løse irrasjonale likninger må vi bli kvitt rottegnet.
- Det gjør vi ved å opphøye.
- Siden $a = b \implies a^2 = b^2$ kun går én vei, kan det introdusere falske løsninger.
- Vi må teste løsningene til slutt.

Irrasjonal likning, eksempel

Oppgave

Løs $\sqrt{5-x} = x - 3$.

- For å bli kvitt rottegnet, opphøyer vi begge sidene i 2, og får
$$5 - x = (x-3)^2.$$
- Vi åpner parentesen og får
$$5 - x = x^2 - 6x + 9.$$
- Vi flytter $5 - x$ over, og får andregradslikningen
$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$
- Vi løser denne med andregradsformelen og får $x = 1 \vee x = 4$.

Irrasjonal likning, eksempel

Oppgave

Løs $\sqrt{5-x} = x - 3$.

- Vi fant svarene $x = 1$ eller $x = 4$.
- Men vi opphøyde likningen, og kan derfor ha introdusert falske løsninger.
- Vi må teste om løsningene stemmer ved å sette inn.
- Vi setter inn $x = 1$:

$$\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \neq 1 - 3.$$

- Vi setter inn $x = 4$:

$$\sqrt{5-4} = \sqrt{1} = 1 = 4 - 3.$$

- Kun $x = 4$ er derfor en faktisk løsning for likningen.

Irrasjonal likning, eksempel II

Oppgave

Løs $\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$.

- For å bli kvitt kvadratroten må vi først få kvadratroten alene.
- Vi flytter over $-x - 1$ til andre siden og får

$$\sqrt{x+7} = x + 1.$$

- Vi opphøyer i 2 for å bli kvitt kvadratroten:

$$x + 7 = (x+1)^2$$

- Vi regner ut parentesen og flytter alt over på høyresiden:

$$0 = x^2 + x - 6.$$

- Vi løser andregradslikningen og får $x = 2$ eller $x = -3$.

Irrasjonal likning, eksempel II

Oppgave

Løs $\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$.

- Vi fant løsningene $x = 2$ og $x = -3$.
- Vi må teste for falske løsninger ved å sette inn.
- Vi setter inn $x = 2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2+7} - 2 - 1 &= 3 - 2 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

- Vi setter inn $x = -3$:

$$\begin{aligned}\sqrt{-3+7} - (-3) - 1 &= 4 + 3 - 1 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

- Kun $x = 2$ er derfor en faktisk løsning for likningen.

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY

STORBYUNIVERSITETET