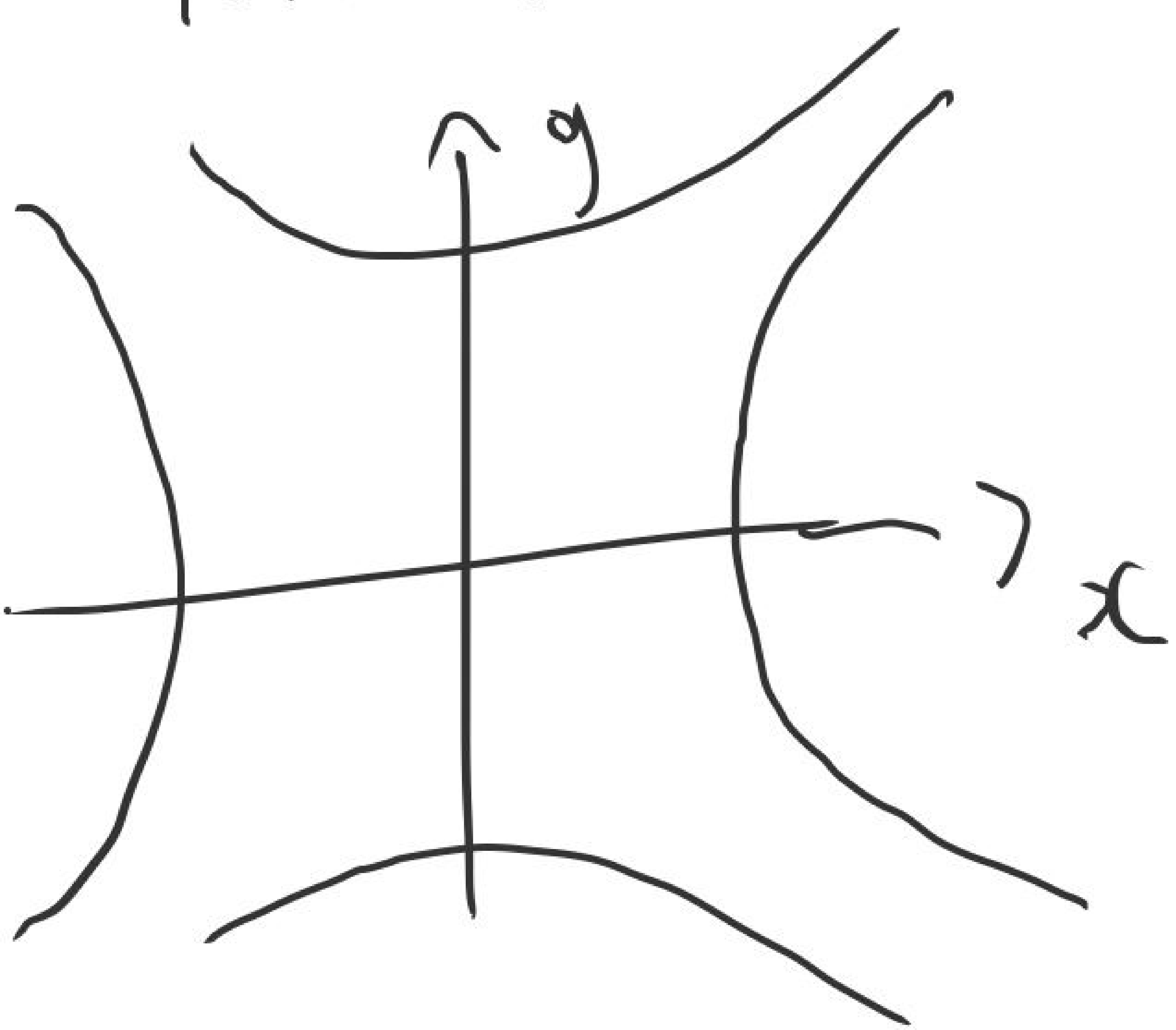
Repetisjon av flervariabel analyse.

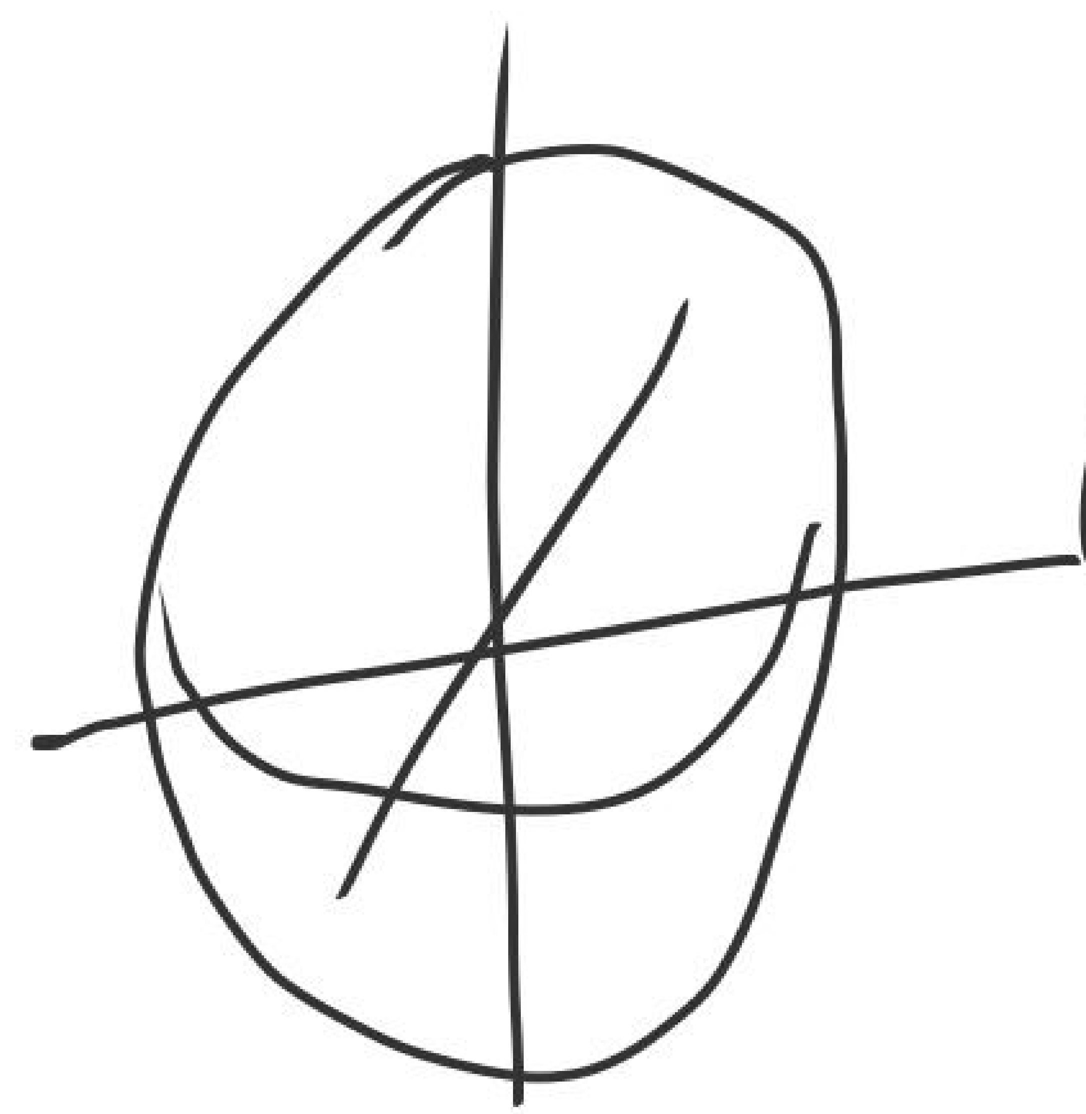
Funksjoner med flere variable.

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

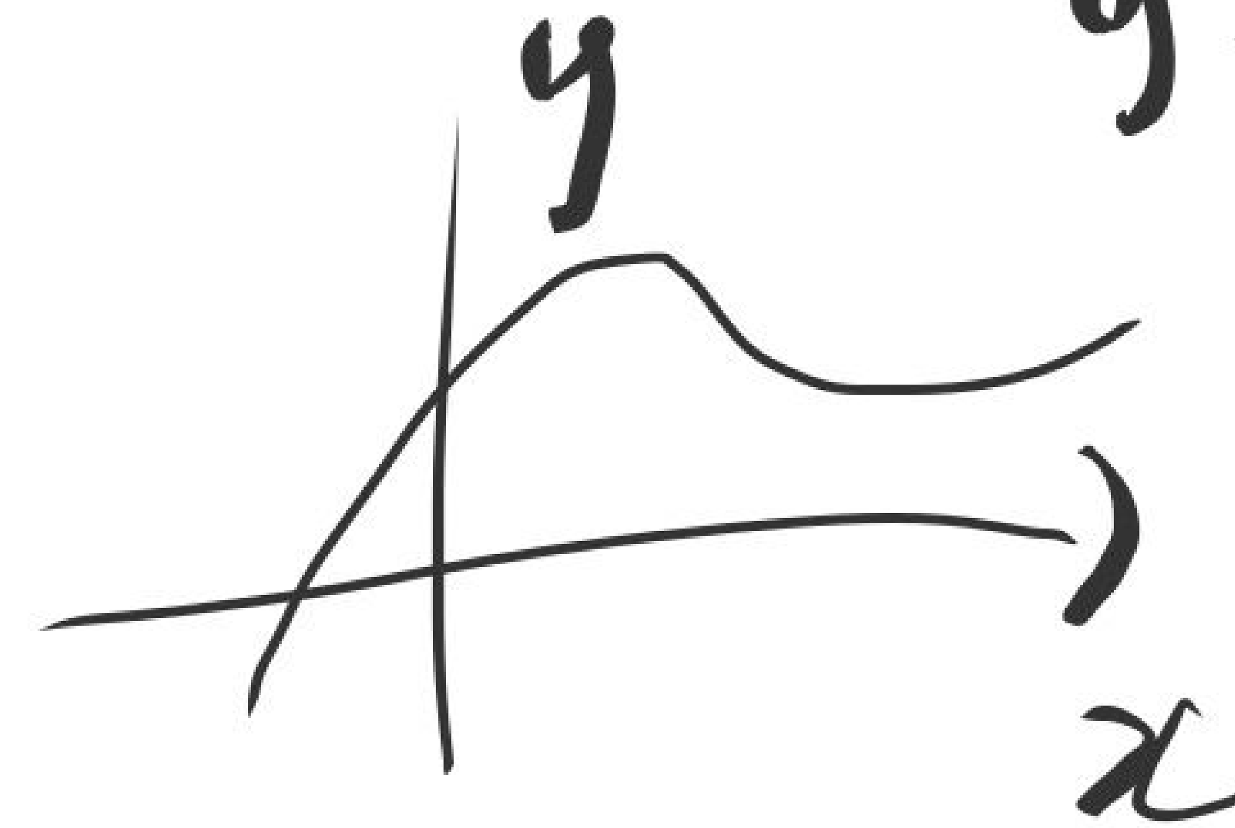
Nivåkurver



Nivåflate



$y = f(x)$



$z = f(x,y)$

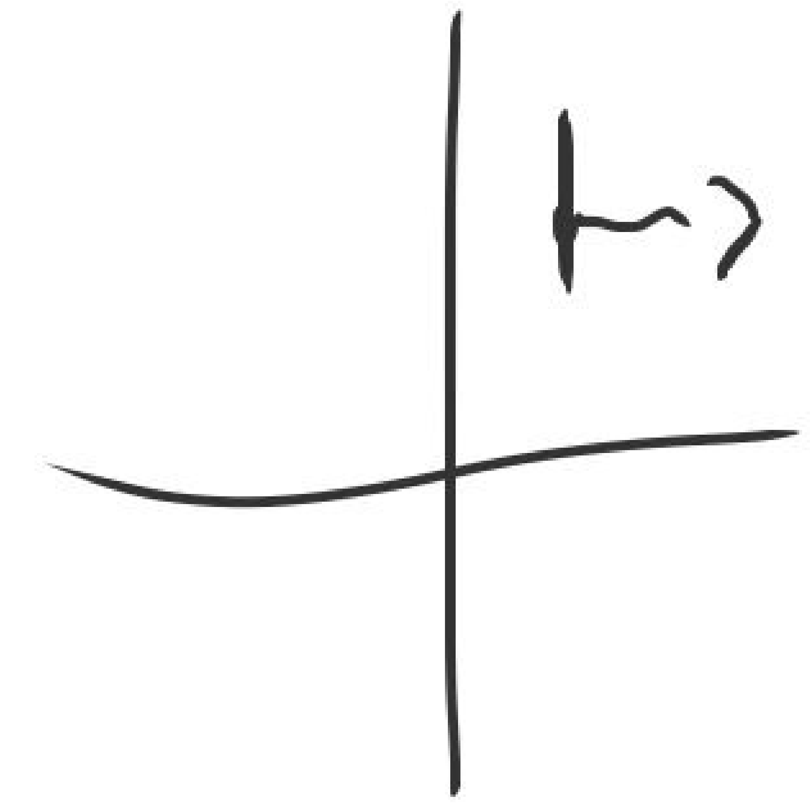
Grafer

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Deriver:

Partiell derivate, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

Deriver funksjonen, lat som de andre ukjente er konstanter.



Eks: $f(x,y,z) = x^2 \cos y + e^z - xz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^z - x$$

Eks $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$

$\ln u$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

Andrederiverte:

Kan derivere mhp x eller y (eller z) på nytt.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Nesten alltid like.

Alternativ skrivemåte

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x$$

Gradient:

$$\nabla f(x,y) = [f_x, f_y] \qquad \nabla g = [g_x, g_y, g_z]$$

- Gradienten peker alltid i bratteste retning.

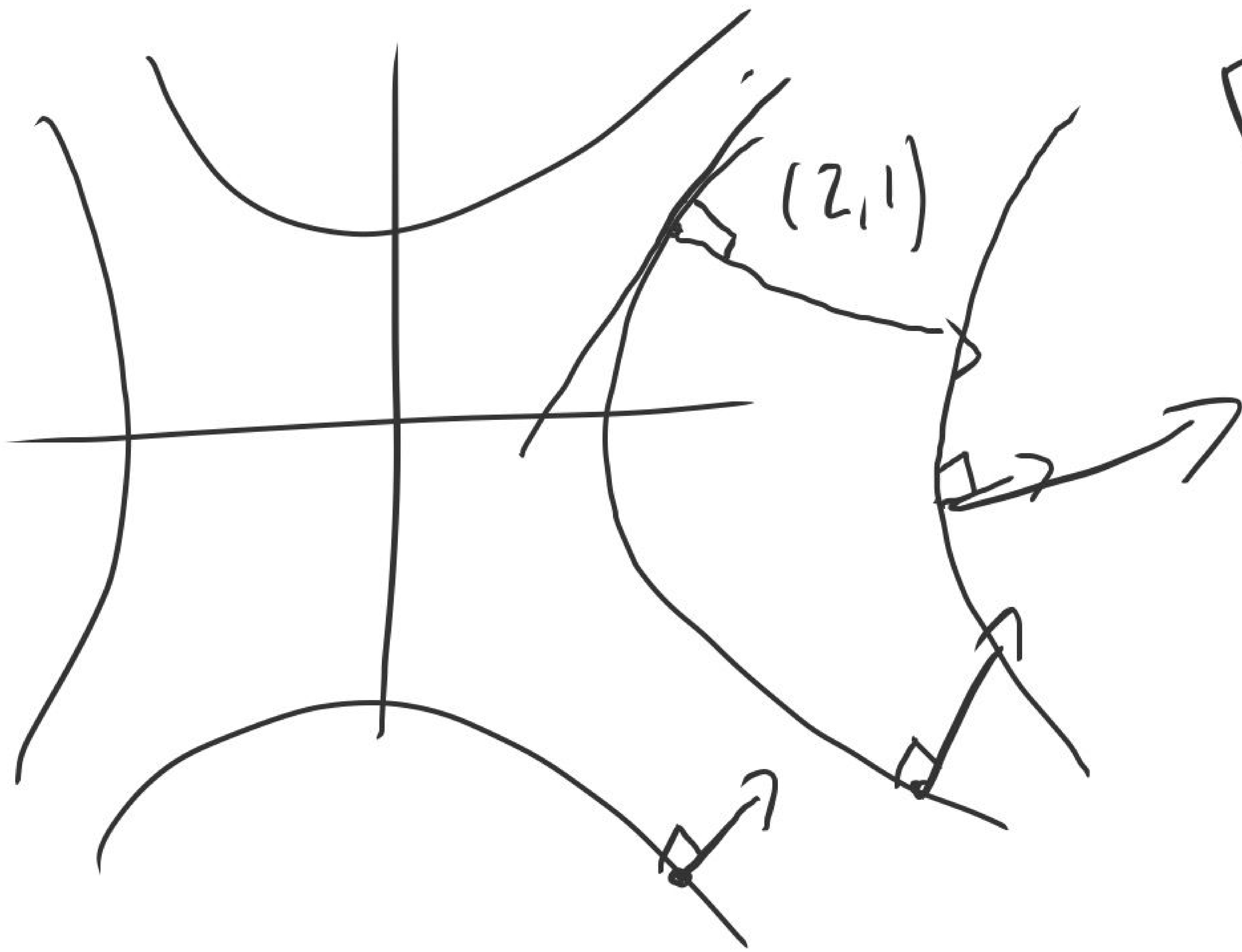
  Motsatt retning av gradienten er der funksjonen synker mest.
- Gradienten er 90° på nivålinjer/nivå kurver.
- Definerer retningsderivert i retning $\vec{u}$ (med $\|\vec{u}\| = 1$)

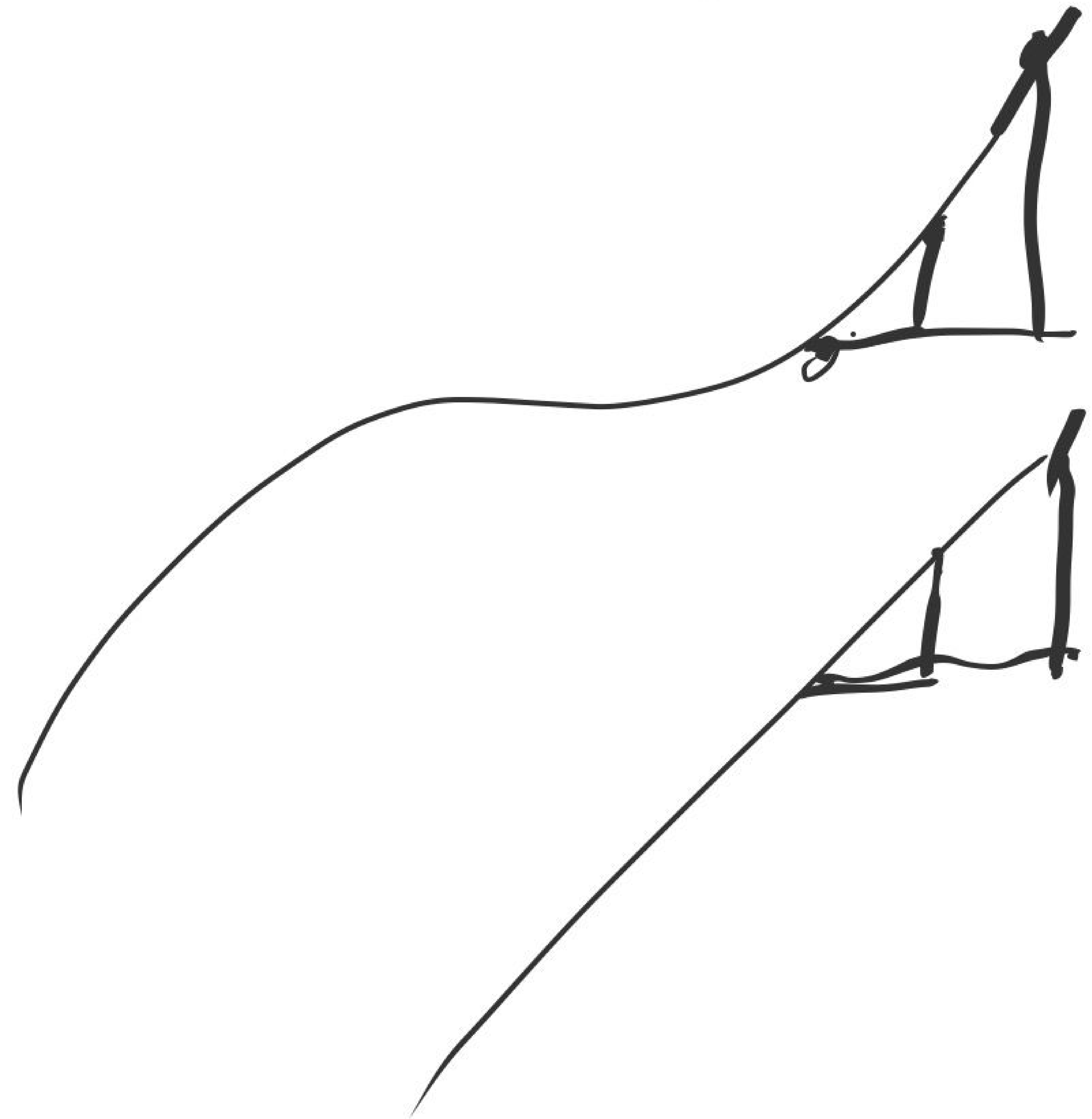
  til å vere $D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$.
- Retningsderiverte i bratteste retninga er $\|\nabla f(a,b)\|$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f = [2x, -2y]$

$\nabla f(2,1) = [4, -2]$





Tangentplan.

Nivåflate til funksjon av tre variable.

$$g(2,1,3) = \frac{4}{4} + 1^2 + 3 = \underline{\underline{5}}$$

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z$$

Finn tangentplanet til nivåflaten $g(x,y,z) = 5$ i punktet $(2,1,3)$.

Gradienten er 90° på nivåflaten

$$\nabla g = \left[\frac{x}{2}, 2y, 1\right]$$

$$\nabla g(2,1,3) = [1, 2, 1]$$

Vi får

$$1(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0$$

$$x - 2 + 2y - 2 + z - 3 = 0$$

$$\underline{\underline{x + 2y + z = 7}}$$

Formel for plan med normalvektor $[a,b,c]$ er

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

Tangentplan til graf
Funksjon av to variable.

$$z = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot [x-a, y-b]$$

$$g(x,y,z) = f(x,y) - z$$

$z = f(x,y)$ $\qquad 0 = f(x,y) - z$

Hva er tangentplanet til nivåflaten $g(x,y,z) = 0$?
Nivåflaten til g er det samme som grafen til f.

$$\nabla g = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right] \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + (-1)(z - f(a,b))$$

$g(x,y,z) = 5 = \frac{x^2}{4} + y^2 + \boxed{z}$ $z = \boxed{5 - \frac{x^3}{4} - y^2} = f(x,y)$

Vanligvis ikke mulig, kun fordi z er "alene".

$f(2,1) = 5 - \frac{2^2}{4} - 1^2$
$= 3$

$$z = 3 + \left[-\frac{2}{2}, -2\cdot 1\right] \cdot \left[x - 2, y - 1\right]$$

$$= 3 + (-1)\cdot(x-2) + (-2)(y-1)$$

$$= 3 - x + 2 - 2y + 2$$

$$\underline{x + 2y + z = 7}$$

Stasjonære punkt (Kritiske punkt)

Der de deriverte er null.

$f_x = 0$ og $f_y = 0$

To likninger, to ukjente.

Eks: $f(x,y) = 3x^3 + xy^2 - 9x$

11.3.3 v)

$f_x = 9x^2 + y^2 - 9 = 0$

$f_y = 2xy = 0$

Vil unngå å dele på ukjente.

$2 \cdot x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $y = 0$

$\underline{x = 0}$

$y^2 - 9 = 0 \quad y = \pm 3$

$(0,3) \quad (0,-3)$

$\underline{y = 0}$

$9x^2 - 9 = 0 \quad x = \pm 1$

$(1,0) \quad (-1,0)$

$2xy = 0 \quad | : x$

Mista $x = 0$ - løsninga.

$2y = \frac{0}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

$2xy = 0 \quad | : y$

$2x = \frac{0}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$

Vil helst unngå å dele på uttrykk med ukjente

$2xy = 0$

$9x^2 + y^2 - 9 = 0$

$2xy - x^2 = 0$

$x(2y - x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

eller

$2y - x = 0$

$\Rightarrow x = 2y$

$$Hf = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$Hg = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{yx} & g_{zx} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{zy} \\ g_{xz} & g_{yz} & g_{zz} \end{bmatrix}$$

Hvis (a,b) er et stasjonært punkt, har vi

$|Hf(a,b)| < 0$ er det et sadelpt.

$|Hf(a,b)| > 0$ og $f_{xx} > 0$ er det et bunnpt

— " — og $f_{xx} < 0$ er det et toppunkt

$|Hf(a,b)| = 0$ vet vi ikke.

$f(x,y) = 3x^3 + xy^2 - 9x$

$f_x = 9x^2 + y^2 - 9$

$f_y = 2xy$

$f_{xx} = 18x \quad f_{yx} = 2y$

$f_{xy} = 2y \quad f_{yy} = 2x$

$(0,3)$
$(0,-3)$
$(1,0)$
$(-1,0)$

$$Hf = \begin{bmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$|Hf(1,0)| = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

$18 > 0$ Bunnpt.

$$|Hf(0,3)| = \left|\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\right| = -36 < 0 \text{ saddpt.}$$

$$|Hf(0,-3)| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \text{ saddpt.}$$

$$|Hf(-1,0)| = \begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

$-18 < 0$

Toppunkt.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Er teknisk sett en McLaurin-rekke.

„potensrekke om 0"

Oppgaven (8.6.2)

a) Vis at potensrekka til $e^{x} - e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} x^{2m+1}$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$e^{x} - e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n!} x^n$$

$$e^x - e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n!} x^n$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ partall} \\ 2 & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

$$\boxed{n = 2m+1}$$

Automatisk bare oddetall.

$m = 0$

$$e^x - e^{-x} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odde}}}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$