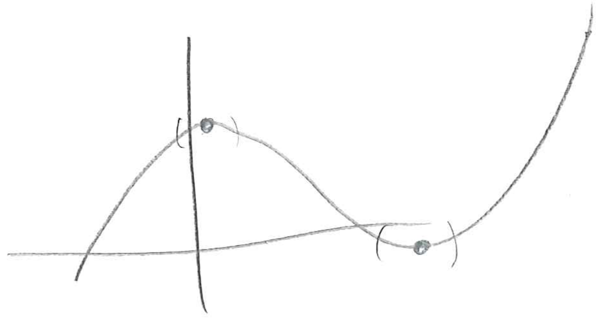
Stasjonære punkter (Kritiske punkter)

Funksjoner med én variabel:

$f(x)$

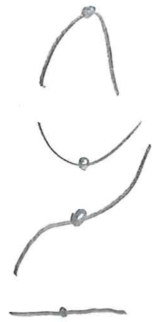


Lokale maksima/minima

Løser $f'(x) = 0$.

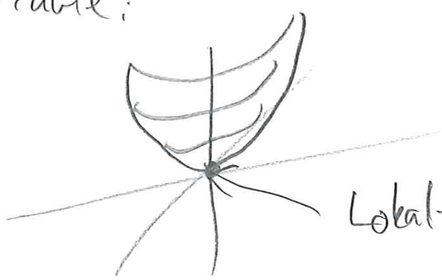
Def: Et stasjonært punkt x er slik at $f'(x) = 0$.

Om $f'(x) = 0$ så er vi i et lokalt max
eller et lokalt min
eller et terassepunkt
eller en rett linje



Funksjoner med flere variable:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

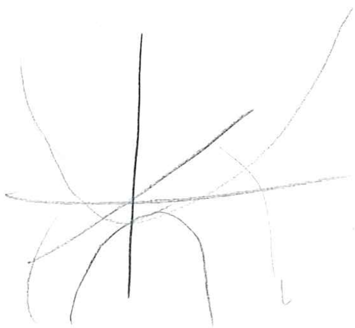


Lokalt minima.

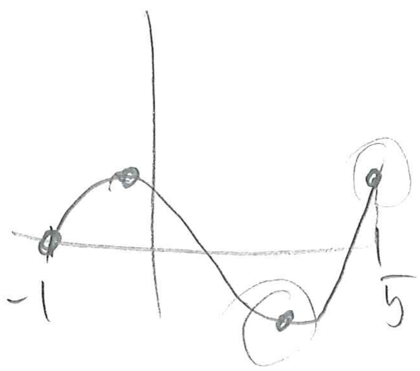
Def: Et stasjonært punkt (x,y) er slik at $\nabla f(x,y) = \vec{0}$

Dvs $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Teorem: Stasjonære punkt er enten:
- Lokalt maksima
- Lokalt minima
- Sadelpunkt.

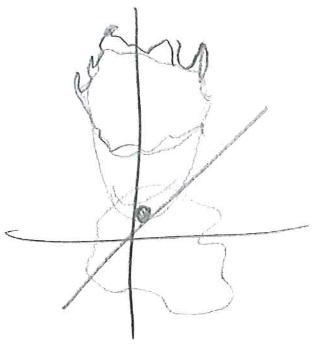


Graf på et område



Finner topp/bunnpt:

- Ser på stasjonære pt.
- Ser på kanten



Finner topp/bunnpt:

- Ser på stasjonære pt.
- Ser på kanten.

Eksempel på sadelpunkt: $f(x,y) = x^2 - y^2$

<u>Eks:</u> Finn stasjonære punkt til $f(x,y) = xy - x$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y-1, x) = (0,0)$$

$$y - 1 = 0 \qquad\qquad x = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad y = 1$$

Kun ett stasjonært pt, $(0,1)$

I én variabel har vi:

Hvis $f'(x) = 0$ og

$f''(x) > 0$ er det et bunnpunkt

$f''(x) < 0$ er det et toppunkt

$f''(x) = 0$ er det et terrassepunkt
(eller rett strek —)

I to variable har vi fire dobbelderiverte.

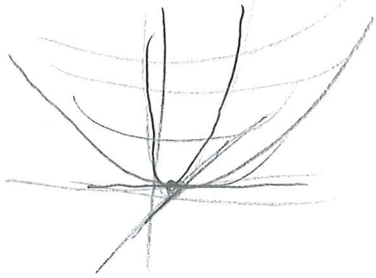
Lager en matrise av de dobbelderiverte.

Disse er like.

$$\text{Hesse-matrisen til } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

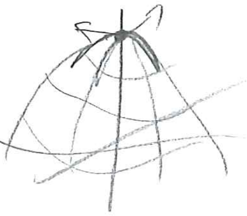
Hvis $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ så vil egenverdiene og egenvektorene til matrisen bestemme hvordan funksjonen krummer seg.

Egenvektorene vil peke der funksjonen krummer mest og minst. Egenverdien er hvor mye funksjonen krummer.



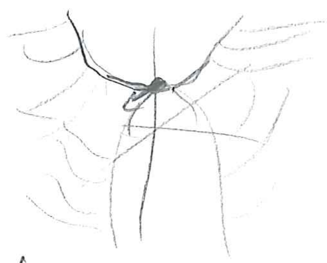
Her er begge egenverdiene positive.

Dette er et bunnpt.



Her er begge egenverdiene negative

Dette er toppunkt.



Her har vi en positiv og en negativ egenverdi.

Dette er et sadelpt.

Eks: Finn stasjonære punkt til $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy + y^2$

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - 2y,\ -2x + 2y\right) = (0,0)$$

$$x^2 - 2y = 0 \qquad x^2 - 2x = 0 \qquad x(x-2) = 0$$
$$-2x + 2y = 0 \qquad x = y \qquad x = 0$$
$$\vee\ x = 2$$

Får stasjonære punkt $(0,0)$ og $(2,2)$

Eks: (Eksamen 2018)

Finn stasjonære punkt til $f(x,y) = (\overset{u}{x^2 + y^2})\, \overset{v}{e^{-x^2-y^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2-y^2} + (x^2+y^2)\left(-2xe^{-x^2-y^2}\right) \qquad f' = u'v + uv'$$

$$= 2xe^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - y^2\right) = 0$$

$u = x^2 + y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$

$v = e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - y^2\right) = 0$$

$$\boxed{2x}\,\boxed{e^{-x^2-y^2}}\,\boxed{(1-x^2-y^2)} = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee\ \boxed{e^{-x^2-y^2} = 0} \ \vee\ 1 - x^2 - y^2 = 0$$

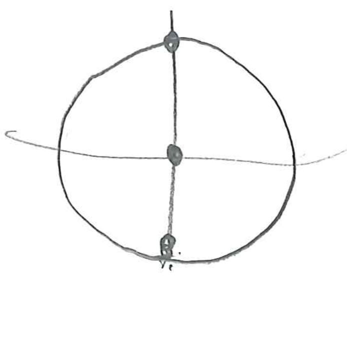
$$2y\, e^{-x^2-y^2}\left(1 - x^2 - y^2\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \ \vee\ \boxed{e^{-x^2-y^2} = 0} \ \vee\ 1 - x^2 - y^2 = 0$$

Vet at $e^k > 0$. Om $x = 0$. $\quad 2ye^{-y^2}(1 - y^2) = 0$

$y = 0 \qquad (0,0)$

$1 - y^2 = 0 \qquad y = \pm 1 \qquad (0,1)\ \ (0,-1)$

Om $1 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$



Eks:

$$f(x,y) = xy - x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

$$Hf = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad |Hf| = -1 < 0$$

Sadelpunkt i $(0,1)$.

Eks: $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$(0,0)$ og $(2,2)$

$$Hf = \begin{bmatrix} \boxed{2x} & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad |Hf| = 4x - 4$$

I $(0,0)$ er $x = 0$, så $|Hf| = -4 < 0$ sadelpt.

I $(2,2)$ er $x = 2$, så $|Hf| = 4 > 0$

$f_{xx} = 2 \cdot 2 = 4 > 0$, så bunnpt.

Andrederiverttesten:

La $\nabla f(a,b) = 0$

og

$$Hf(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \, , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \, , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Da: La $|Hf(a,b)| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

- Hvis $|Hf(a,b)| < 0$ er (a,b) et saddelpt.
- Hvis $|Hf(a,b)| > 0$ så
  - Hvis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ er (a,b) et bunnpt
  - Hvis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ er (a,b) et toppunkt.
- Hvis $|Hf(a,b)| = 0$ kan det vere hva som helst.

Eks (Eksamen 2018)

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{-x^2-y^2}(1-x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\, e^{-x^2-y^2}(1-x^2-y^2)$$

Vi <u>kan</u> bruke dobbeldeviverttesten, men er stress.

<u>Eks:</u> $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{matrix} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{matrix} \quad (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$

$f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = -2$

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|Hf| = -4 - 0 = -4 < 0$$

Sadel pt.

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 0$

$x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 - 3 \cdot y^2 = 0 \Rightarrow -3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Løsning: $(0,0)$

$f_{xx} = 6x \quad f_{xy} = -6y$

$f_{yx} = -6y \quad f_{yy} = -6x$

$Hf = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|Hf| = 0^2 - 0^2 = 0$

Finn de kritiske punktene til

$$f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x^2+y^2)\cdot 2x = 0 \qquad x=0 \lor \sin(x^2+y^2)=0$$

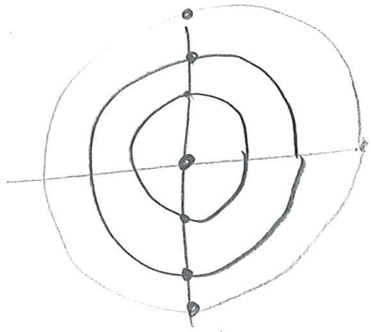
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x^2+y^2)\, 2y = 0 \qquad y=0 \lor \sin(x^2+y^2)=0$$

Option 1 $\sin(x^2+y^2) = 0$ $\qquad x^2+y^2 = \pi \cdot k = r^2$

$r = \sqrt{\pi k}$

Option 2: $x=0$

$-\sin(y^2)\cdot 2y = 0$ ✓



Enten $y=0$

eller $\sin(y^2)=0$

$y^2 = \pi \cdot k$

$x=0 \quad y = \pm\sqrt{\pi k}$

$$f_{xx} = x\cdot(-\sin(x^2+y^2)) + (-\cos(x^2+y^2)\cdot 2x)\cdot 2x$$

$$= -x(\sin(x^2+y^2) + 4x\cos(x^2+y^2))$$

$$f_{yy} = -y(\sin(x^2+y^2) + 4y\cos(x^2+y^2))$$

$$f_{xy} = -4xy\cos(x^2+y^2) = f_{yx}$$