Repetisjon Rekker

Hva er en rekke?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Hva blir denne summen?

↑ kan starte andre steder.

To muligheter:

- Konvergerer, går mot et tall $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = a$
- Divergerer:
  - Går mot $+\infty$ eller $-\infty$
  - Veksler mellom flere verdier.
    - Krever negative og positive ledd i rekka.

Ofte vanskelig å finne hva summen er, men vi kan i hvert fall finne ut om rekka konvergerer.

Eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

- Vet at denne konvergerer.
- Kan bruke datamaskinen til å finne ca hva den konvergerer mot.
- Ingen vet nøyaktig hva den går mot.

Rekketester Har rekke $\sum a_n$

Divergenstesten

Hvis leddene ikke går mot 0 må rekka divergere

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ divergerer.}$$

Merk: Kan kun si om noen rekker divergerer.

- $\sum \frac{1}{n}$ har $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, men divergerer
- $\sum \frac{1}{n^2}$ har $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, og konvergerer.

Alternerende rekketest

Annenhver positive og negative

Hvis leddene er alternerende og i absoluttverdi synker mot 0, vil rekka konvergere.

Typisk har alternerende rekker ledd på formen

$$a_n = (-1)^n \cdot b_n \,, \quad b_n \geq 0.$$

Krever $b_n > b_{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Forholdstesten:

La $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,$

- Om $L < 1$ vil $\sum a_n$ konvergere
- Om $L > 1$ vil $\sum a_n$ divergere
- Om $L = 1$, hvem vet.

- Hvis rekka har fakultet, er forholdstesten best.
- Hvis leddene er potenser med n som grunntall (eks $\frac{3n^2-2n}{n^5+3}$), vil forholdstesten alltid gi 1.

Grense sammenlikningstesten:

Har to positive rekker $\sum a_n$ og $\sum b_n$

- Hvis $\sum b_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$

  vil $\sum a_n$ konvergere.
- Hvis $\sum b_n$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

  vil $\sum a_n$ divergere.

- Hvis $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$

  må $\sum a_n$ og $\sum b_n$ oppføre seg likt.

p-testen:

$$\sum \frac{1}{n^p} \quad \begin{matrix} \text{konvergerer hvis} & p > 1 \\ \text{divergerer hvis} & p \leq 1. \end{matrix}$$

Eks Vil rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 - 3n^2}{n^5 + 7}$$

konvergere?

$$\frac{n^4 - 3n^2}{n^5 + 7} \approx \frac{n^4}{n^5} = \frac{1}{n} \quad \text{for store } n$$

Grensesammenlikne med $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^4 - 3n^2}{n^5 + 7}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^4 - 3n^2}{n^5 + 7} \cdot \frac{n}{1} = \frac{(n^5 - 3n^3) : n^5}{(n^5 + 7) : n^5}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{7}{n^5}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Siden $0 < 1 < \infty$ vil de to rekkene oppføre seg likt.

Siden $\sum \frac{1}{n}$ divergerer, vil $\sum \frac{n^4 - 3n^2}{n^5 + 7}$ divergere.

Absolutt konvergens:

En rekke er absolutt konvergent om

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} |a_n| \quad \text{konvergerer.}$$

Teorem: Absolutt konvergente rekker konvergerer.

Absoluttest:

Hvis $\sum |a_n|$ konvergerer så vil $\sum a_n$ konvergere.

Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\frac{5}{2}}} = \frac{\sin 1}{1^{\frac{5}{2}}} + \frac{\sin 2}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{\sin 3}{3^{\frac{5}{2}}} + \dots$$

$\sin 1 = 0.84147\dots$

$\sin 2 = 0.909297\dots$

$\sin 3 = 0.141120\dots$

$\sin 4 = -0.7568\dots$

$\sin 5 = -0.9589\dots$

$\sin 6 = -0.2794\dots$

$\sin 7 = 0.65698\dots$

$$\sum \frac{|\sin n|}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$0 < |\sin n| \leq 1$

$$\frac{|\sin n|}{n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

siden $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergerer

vil $\sum \frac{|\sin n|}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergere

og derfor også $\sum \frac{\sin n}{n^{\frac{5}{2}}}$ konvergere.

$\sum \frac{\sin n}{n}$ Gir $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ divergerer

Vet ikke om denne konvergerer eller divergerer.

Potensrekker:

En potensrekke om a er en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

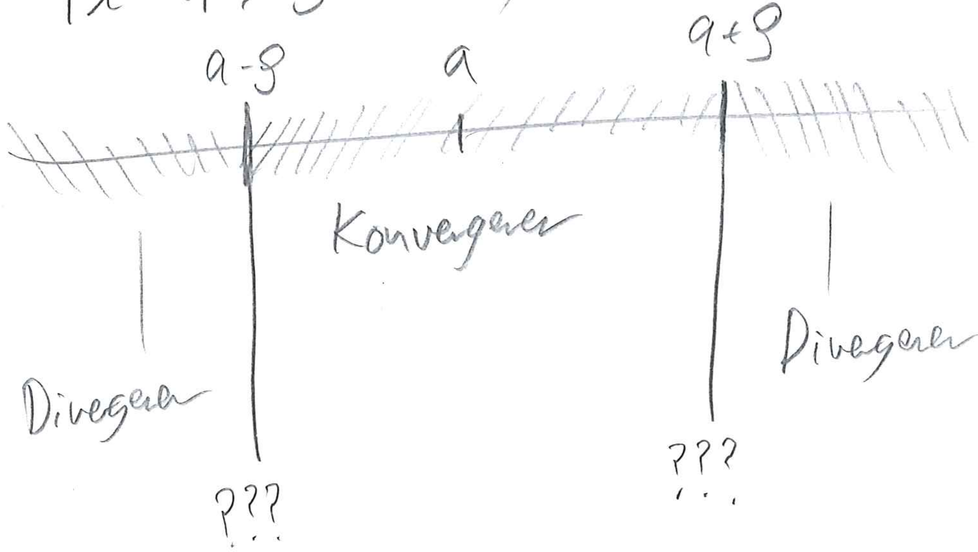
Vil alltid konvergere hvis $x=a$,

Finn ut for hvilke andre verdier av x konvergerer rekka.

Hver potensrekke har en konvergensradius ρ, som er slik at

om $|x-a| < \rho$ konvergerer rekka, og

om $|x-a| > \rho$ divergerer rekka.



Om vi skal finne konvergensområdet, må vi sjekke $a-\rho$ og $a+\rho$.

Mesteparten av tida har vi $a=0$.

Rekka er da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- Konvergensradius 0, rekka kan konvergere for $x=a$
- Konvergensradius ∞, rekka konvergerer for alle x.

Bruka forholdstesten for å finne konvergensradius.

Eks:

$$\sum \frac{5^n}{n^2} x^n$$

Forholdstesten $\left| \dfrac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} x^{n+1}}{\frac{5^n}{n^2} x^n} \right| = \left| \frac{\cancel{5^{n+1}}}{\cancel{5^n}} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{\cancel{x^{n+1}}}{\cancel{x^n}} \right|$

$$= 5 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot |x|$$

$$= 5 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 |x| \to 5 \cdot |x|$$

Forholdstesten: konvergerer hvis $5 \cdot |x| < 1$

dvs $|x| < \frac{1}{5}$

Vet at konvergerer når $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$.

Sjekker endept.

$x = \frac{1}{5}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{5^n}}{n^2} \frac{1}{\cancel{5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer via p-test.

$x = -\frac{1}{5}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{5^n}}{n^2} \frac{(-1)^n}{\cancel{5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergerer alternerende.

Konvergensområdet er $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

Funksjoner som potensrekker:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{alle } x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Vi kan kombinere og regne på disse for å finne nye potensrekker.

Eks

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^x \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}}{t}\,dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\,dt$$

Kan bruke til å finne tilnærminger.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \approx x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}$$

$$= Si(x)$$