Absolutt konvergente rekker:

En absolutt konvergent rekke er en rekke som konvergerer når vi setter på absoluttverditegn.

Eks:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

er absolutt konvergent, fordi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$ konvergerer

---

Betinget konvergent.

Eks:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

er ikke absolutt konvergent, siden

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$ divergerer.

Teorem: En absolutt konvergent rekke konvergerer.

Trikset er typisk å ta absoluttverdi, bruke andre testa på den nye positive rekka.

Potensrekker

En potensrekke <u>sentrert i a</u> er en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Her er x en ukjent.

Mesteparten av tiden vil vi sentrere i 0, og får

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(Sier at $0^0 = 1$)

Første spørsmål: Vil denne rekka konvergere?
Egentlige spørsmål: For hvilke x vil rekka konvergere?

<u>Eks</u>: $x=0$ vil gjøre at rekka konvergerer.

<u>Trikset</u>: Bruke forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |x|$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1 \quad ? \quad |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

Konvergerer når $|x| < \frac{1}{L}$, hvor $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

$$x \in \left\langle -\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right\rangle$$

Tre muligheter: R eller ρ, w/e

- $L = 0$, konvergensradius $\rho = \infty$. konvergerer for alle x.
- $L = \infty$, konvergensradius $\rho = 0$, konvergerer kun for $x = 0$
- $0 < L < \infty$, konvergensradius $\rho = \frac{1}{L}$, konvergerer når $x \in \langle -\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \rangle$

Eks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\frac{\overbrace{\cancel{x} \cdot x \cdot x \cdots x \cdot x}^{n+1}}{\underbrace{\cancel{x} \cdot x \cdot x \cdots x}_{n}} = x$$

Forholdstesten:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \left| \frac{x^{n+1}}{\cancel{x^n}} \right|$$

$$= |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right|$$

$$= |x| < 1 \quad \leftarrow \text{Fra forholdstesten}$$

Konvergerer når $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Divergerer når $x < -1$, eller $x > 1$

Når $x = 1$ er rekka $\sum \frac{1^n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

Divergerer

Når $x = -1$ er rekka $\sum \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

Konvergerer via alternerende rekketest.

Vi kan lage funksjoner definert vha potensrekker.

Eks:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{når} \qquad x \in [-1, 1\rangle .$$

Kan vi skrive kjente funksjoner vha potensrekker?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{når} \qquad x \in \langle -1, 1\rangle$$

Eks: $\dfrac{1}{1-0{,}3} = 1 + 0.3 + 0.09 + 0.0027 + 0.00081 + \dots$

Fakultet (factorial)

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$

Kjente funksjoner og deres rekker:

① $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergensradius 1

② $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ konvergensradius ∞

③ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ konvergensradius 1

④ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ konvergensradius ∞

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

⑤ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ konvergensradius ∞.

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$$

⑥ $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ minst konvergensradius på 1.

Hva er $\sin(2)$?

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

$$\sin 2 = 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{120} - \frac{128}{5040} + \dots \qquad + \frac{512}{362880}$$

$$\approx \frac{286}{315} \approx 0.9079365079\dots \qquad 0.9093$$

$$\sin 2 = 0.909297\dots$$

I fysikk: for små vinkler blir x^3 veldig lite, x^5 veldig lite, etc.

Har at $\sin x \approx x$ for små vinkler.

Tilsvarende er $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ for små vinkler.

Manipulasjon av potensrekker:

Vi kan plusse, minuse, gange, derivere og integrere potensrekker, konvergensradien blir den samme.

Eks.

Hva er leddene opp til $n=5$ for potensrekka til

$\sin x \cdot \cos x$?

$$\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\dots\right)$$

$$=x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^5}{120}+\dots$$

$$=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\dots$$

Eks: Eksamen 2017

Idé: $x=\frac{1}{3}$ $\quad x^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n=3^{-n}$

Finn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n}$

Ser på potensrekka $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

Deriverer!

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left((1-x)^{-1}\right)'=-1(1-x)^{-2}\cdot(-1)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$x\cdot\Big|\ \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

Sett inn $x=\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad \frac{3}{4}=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Skrev opp $\ln 1-x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Kan se hvor denne kommer fra.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ Integrerer begge sider:

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x)\Big|_0^t = -\ln(1-t)$$

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^t$$

$m = n+1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$-\ln(1-t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Finn de første fem leddene til potensrekken til $\tan x$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right) \cdot \boxed{\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \dots\right)}}$$

y

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)\left(1 + y + y^2 + y^3 + \dots\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 10$$

$$\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 1} \qquad \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} \qquad \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \qquad \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot \boxed{0}\cdot(-1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$(1+x)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}\cdot x + \binom{3}{2} x^2 + \binom{3}{3} x^3 + \binom{3}{4} x^4 + \dots$$

$$= \boxed{1 + 3x + 3x^2 + x^3} + 0x^4 + 0x^5 + \dots$$

Blir uendelig lang.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 1} x^2$$

$$\sqrt{85} = \sqrt{81+4} = (81+x)^{1/2} = 9 + \frac{1}{2\cdot 9}\cdot x + \dots$$

$$\approx 9 + \frac{x}{18} \approx 9 + \frac{4}{18} = 9 + \frac{2}{9}$$

$$= 9.22$$

$$\sqrt{a+x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} x$$