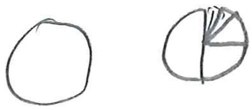
Rekker:

Hva er en rekke?

- En liste med tall som vi vil plusse sammen.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Vil se på uendelige rekker, vi har en uendelig lang liste.



I det uendelige: To pizzaer.

Matematisk tolkning:

$$S_0 = 1 \qquad S_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} ; \text{ etc.}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n$$

Summenotasjon

$$\sum_{n=3}^{7} n^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$$

Vi ser på $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Lurer på hva er greia.

Tre muligheter:

1: Rekka konvergerer, summen kommer nærmere og nærmere et tall S.

Eks $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$= 1,5$

2: Rekka divergerer mot uendelig.

Eks: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \infty$

3: Rekka divergerer, men ikke mot uendelig.
Rekka klarer ikke bestemme seg.

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$S_1 = 1 \qquad S_2 = 0 \qquad S_3 = 1 \qquad S_4 = 0 \dots$

Teorem:
Om alle leddene i rekka $\sum a_n$ er positive, må vi være i mulighet 1 eller 2.

Vi vil kjenne igjen når vi er i mulighet 1, rekka konvergerer.

Divergens testen:

Hvis $\sum a_n$ er en vendelig rekke, og

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ må rekka divergere.

Merk: Dette går kun én vei. Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ kan rekka fremdeles divergere.

Eksempel: Den harmoniske rekka:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergerer. Ser her at $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

p-testen:

Rekka $\sum \frac{1}{n^p}$ divergerer hvis $p \leq 1$
konvergerer hvis $p > 1$.

Eks:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Konvergerer siden $2 > 1$. (mot $\frac{\pi^2}{6}$)

Eks:

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

konvergerer siden $3 > 1$ (mot ca 1,202)

Eks:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

divergerer, siden $\frac{1}{2} \leq 1$.

Eks: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

Ser at hvert ledd er mindre enn leddene i

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Siden $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergerer, burde $\sum\frac{1}{n^2+1}$ også konvergere.

~~Forholdstesten~~ Sammenlikningstesten.

Hvis $\sum a_n$ og $\sum b_n$ er to positive rekker med $a_n \leq b_n$, har vi

- Hvis $\sum b_n$ konvergerer må $\sum a_n$ konvergere.
- Hvis $\sum a_n$ divergerer må $\sum b_n$ divergere.

Eks: Se på $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\dots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

Problem: Har at $\frac{1}{n^2-1}>\frac{1}{n^2}$ for alle n.

Løsning: se på $\frac{2}{n^2}>\frac{1}{n^2-1}$ Er dette OK?

$$2(n^2-1)>n^2 \qquad n^2>2 \qquad \text{OK når } n>1$$

Så vi har at $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}$,

Så $\sum_{n=2}\frac{1}{n^2-1}$ konvergerer.

Det som faktisk betyr noe er hvor fort rekkene vokser i forhold til hverandre.

Grensesammenlikningstesten

Hvis $\sum a_n$ og $\sum b_n$ er positive rekker

- Hvis $\sum b_n$ konvergerer, og

  $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L < \infty$, vil $\sum a_n$ konvergere.

- Hvis $\sum b_n$ divergerer, og

  $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, vil $\sum a_n$ divergere.

Eks

$$\sum \frac{1}{n^2-1} \quad \text{vs} \quad \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2-1} = \cancel{\frac{\infty^2}{\infty^2-1}} = 1 < \infty.$$

Så siden $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerer, må $\sum \frac{1}{n^2-1}$ også.

Eks:

Vil

$$\sum \frac{9n^2+280}{5n^4-33n^3}$$

konvergere?

Tenker: Leddene $\frac{9n^2+280}{5n^4-33n^3}$ er ca $\frac{n^2}{n^4} \approx \frac{1}{n^2}$

Sammenlikner med $\frac{1}{n^2}$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{9n^2+280}{5n^4-33n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{9n^4+280n^2}{5n^4-33n^3} = \frac{9+\frac{280}{n^2}}{5-\frac{33}{n}}$$

$$\to \frac{9}{5} < \infty.$$

Så $\sum \frac{9n^2+280}{5n^4-33n^3}$ vil konvergere.

Ser at $\frac{9n^2+280}{5n^4-33n^3}$ kan være negativt, men vil være positivt for alle store nok n. Så går fint.

~~Hvis jeg hadde sammenlikna med $\frac{1}{n}$, ville jeg fått~~

$$\cancel{\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{9n^2+280}{5n^4-33n^3}}{\frac{1}{n}} = \frac{9n^3+280n}{5n^3-33n}}$$

Vi vil nå ha tester for ikke-positive rekker også.

Alternerende rekketest:

Hvis $\sum a_n$ er en <u>alternerende rekke</u>,
(dvs annenhvert ledd positivt/negativt)

<u>og</u> $|a_n|$ er synkende

<u>og</u> $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så vil rekka konvergere.

<u>Eks:</u>

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

vil <u>konvergere</u>.

<u>Eks:</u>

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$$

vil vokse og vokse, mot $+\infty$ og $-\infty$. divergerer.

To siste tester:

- Forholdstesten
- Rot-testen

La $\sum a_n$ være en rekke. Se på enten

- $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ (Forholdstesten)

- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ (Rot-testen)

- Hvis $L < 1$ vil rekken konvergere.
- Hvis $L > 1$ vil rekken divergere.
- Hvis $L = 1$ må vi bruke en annen test.

Eks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} = \lim \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Denne rekken konvergerer.

Geometriske rekka

Ser på rekka

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} k^n$$

Fra videregående:

$$\sum_{n=0}^{N} k^n = \frac{1-k^{N+1}}{1-k}$$

Vi vil ha $N = \infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1-k^{\infty}}{1-k}$$

$k^{\infty} = \infty$ om $|k| > 1$

$k^{\infty} = 0$ om $|k| < 1$

Konvegerer om $|k| < 1$. Konvegerer mot $\frac{1}{1-k}$.

Eks: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = \underline{1{,}5}$$

Hvis $k = 1$ blir rekka

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ divergerer mot ∞

og hvis $k = -1$ blir rekka

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ divergerer,

Geometrisk rekke konvegerer mot $\frac{1}{1-k}$ om $|k| < 1$

divergerer om $|k| \geq 1$.

Rekkefølge på tester:

- Divergenstesten $a_n \to 0$?
- Alternerende rekketest
- Forholdstesten (noen ganger rot-testen)
- (Grense)sammenlikningstesten