Oppgave 4 2016

a) Gitt en matrise (diagonaliserbar) (2x2) A med determinant -1, og én egenverdi lik 3, finn alle egenverdiene til A.

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A| = -1$

$3 \cdot \lambda_2 = -1$

$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$.

b) Gi et eksempel på en diagonalisérbar 3x3-matrise med kun én egenverdi.

Velg for eksempel $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vil lage diagonaliserbar 2x2-matrise med egenverdier 1 og 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

c) Gitt at B er en 2×2-matrise med egenverdier -1 og 1, finn

$$B^2 - I.$$

Siden B har to forskjellige egenverdier, så er B diagonalisérbar.

$$B = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = ?$$

$$B^2 = B \cdot B = P \cdot D \cdot \cancel{P^{-1} \cdot P} \cdot D \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot I \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot P^{-1}$$
$$B^2 = I$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^2 - I = I - I = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden B har egenverdier -1 og 1, så er det karakteristiske polynomet til B gitt ved

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Da må matrisen tilfredsstille

$$B^2 - I = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 1 2013

Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

a) Finn egenverdier og egenvektorer til A.

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 8$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda = -2 \quad \text{og} \quad \lambda = 4$$

Egenvektor for $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 - 4R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 0, \quad y = -2x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ For eksempel $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 8 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 + 2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-4x + y = 0 \qquad y = 4x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ For eksempel $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Diagonalisér A.

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Kan teste:

$$A \cdot P = P \cdot D$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

---

c) Løs systemet

$$x' = x + y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$y' = 8x + 2y$$

Påstå: Sikkert skrivefeil, skulle vært

$$x' = y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$y' = 8x + 2y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \cdot e^{-2 \cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + De^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{-2t} + De^{4t} \\ -2Ce^{-2t} + 4De^{4t} \end{pmatrix}$$

Om ikke skrivefeil:

Må finne egenverdier og egenvektorer til $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 3\lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

Egenvektorer: $\lambda = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$

$$\left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 1 & 0 \\ 8 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 0 \end{matrix}\right) \overset{R_2 - \omega R_1}{\sim} \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x + y = 0 \qquad y = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{evt} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{33} \end{pmatrix}$$

Egenvektor $\lambda = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$

$$\left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} & 1 & 0 \\ 8 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} & 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x + y = 0 \qquad y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x$$

Egenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{33} \end{pmatrix}$

Generell løsning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C e^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{33} \end{pmatrix} + D e^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{33} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = 2C e^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t} + 2D e^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t}$$

$$y(t) = (1+\sqrt{33})C e^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t} + (1-\sqrt{33})D e^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}\right)t}$$

Oppgave 1 2015

Gitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Finn determinanten til A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} - \cancel{0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) = -1$$

Enda raskere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinant $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Å bytte to rader bytter fortegn på determinanten

Må ha determinant -1.

b) Finn A^{-1} og A^T $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{I} \qquad\qquad A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

---

c) Finn egenverdiene til A.

Regner langs midterste rad

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$$

Gir oss $1-\lambda = 0$ eller $\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = 1 \qquad\qquad \lambda = \pm \underline{1}$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$

$\lambda_1 = \underline{1}$ med multiplisitet 2

$\lambda_2 = -1$ " " — $\underline{1}$

d) Er A diagonalisérbar?

Vil vi få to frie variable når vi finner egenvektor til $\lambda = 1$.

Finner egenvektorer for $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3+R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big\} \text{2 stk.}$$

Vi vil få to frie variable, kan derfor finne to egenvektorer i forskjellig retning for $\lambda = 1$.

$$-x + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det finnes en egenvektor for $\lambda = -1$ også, så vi har tre lineært uavhengige egenvektorer, så A kan diagonaliseres.

(Full pott om vi stopper her).

Finner egenvektor for $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}R_2}{\overset{R_3-R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + z = 0$$
$$y = 0$$
$$x = -z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi får

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(kan teste $A \cdot P = P \cdot D$)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Finn den generelle løsningen til

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= z + 1 \\ y' &= y \\ z' &= x \end{aligned}} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finner $\vec{x}_c$ som løser $\vec{x}_c{}' = A\vec{x}_c$

Finner $\vec{x}$ ved $\vec{x}_c - A^{-1}\vec{b}$

Generell løsning av det homogene systemet (dvs uten $+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_2 e^{t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{t} \\ C_2 e^{t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \vec{x}_c$$

Regner ut $A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 e^{t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{t} \\ C_2 e^{t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 e^{t} - C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{t} \\ C_2 e^{t} + C_3 e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 1 2016-2.

a) Vis at $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tilfredsstiller $A^2 - 2A + I = 0$ og finn A^{-1}!

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+1 & 2-2+0 \\ 0+0+0 & 1-2+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Finn A^{-1}! Har at $A^2 - 2A + I = 0$

$$I = 2A - A^2$$

$$I = A\underbrace{(2I - A)}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vanlig metode for 2x2-matriser:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Kan A diagonaliseres?

Egenverdiene til A.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = \underline{1}$$

Vet at egenverdiene må tilfredsstille

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \underline{1}.$$

Har $\lambda = \underline{1}$ <u>to</u> frie variable i egenvektor?

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y = 0$ Én fri variabel.

Egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finner <u>ikke</u> to egenvektorer som er uavhengige.

A er <u>ikke</u> diagonaliserbar.