9.3.2: Regn ut determinanter vha definisjonen.

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 4 \cdot 0 + 7 \cdot 4 = 28.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$- 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ \underline{1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$- \underline{1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 8 + 25 = -27$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -4 - 8 + 5 = -7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 + 6 - 30 = -20$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -10 + 3 - 24 = -31$$

b)

$$= 1\cdot(-27) - 2\cdot(-7) + 1\cdot(-20) - 1\cdot(-31)$$

$$= -27 + 14 - 20 + 31 = \underline{-2}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{+0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}}$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{+0\cdot\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}}$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

9.3.3 Regn ut determinant vha radoperasjoner.

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1 - R_3}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_3 - 2 \cdot R_1}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_3 - R_2}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-7) = -28$$

Originale er $-(-28) = \underline{28}$.

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 - 2\cdot R_1 \\ \sim \\ R_3 + 4\cdot R_1 \\ R_4 - 5\cdot R_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_4 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 - 7\cdot R_4 \\ \sim \\ R_3 + 10\cdot R_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & -13 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 16 & 10 \\ -13 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-128 + 130) = -2$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 10 & 7 & 2 \\ -11 & -9 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & 16 & 10 \\ 0 & -13 & -8 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 16 & 10 \\ -13 & -8 \end{vmatrix}$$

9.3.13

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut det A og forklar hvorfor A er invertibel.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{\sim}{R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} R_1 - 4 \cdot R_2 \\ \sim \\ R_3 - 2 \cdot R_2 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{3}}$$

A er invertibel <u>hvis og bare hvis</u>

$\det A \neq 0$

$\det A = 3 \neq 0$

så er A invertibel.

c) Finn A^{-1} ved å utføre radoperasjoner

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 - 4 \cdot R_2 \\ \sim \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 - R_3 \\ \sim \\ R_1 - R_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \cdot \tfrac{1}{3} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 + R_2 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\cos A)^T$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

9.3.11

a) Regn ut det A og A^{-1} når

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Bytt plass på 5 og -4

Bytt fortegn på -6 og 3

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 5\cdot(-4) - (-6)\cdot 3 = -20 + 18 = \underline{\underline{-2}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}}$$

$$\text{co}\cancel{s}\,A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

det A

8