Plan:

Idag: Repetere matriser.

Imorgen: Oppgaver om gradienter etc

Torsdag: Repetere rekker

Mandag: Gå gjennom prøve-eksamen.

Tirsdag: Repetere flervariabel analyse

Onsdag: Oppgaver om topp/bunnpkt

Torsdag: Gå gjennom div. eksamener.

Matriser er firkanter med tall

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{}^{4} \\ 3\left\{\right. & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

3×4

Vi kan:

- Plusse to matriser av samme størrelse element for element.
- Gange tall med matrise, tallet ganges med hvert element.
- Gange sammen to matriser, hvis antall kolonner i venstre matrisen lik antall rader i høyre.

$$n \times m \cdot m \times k = n \times k$$

$$a)\ \begin{array}{c} 3 \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 3 \begin{array}{c} 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array} = 2 \begin{array}{c} 3 \\ \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 5\cdot 4 + 7\cdot 7 & 3\cdot 2 + 5\cdot 5 + 7\cdot 8 & 3\cdot 3 + 5\cdot 6 + 7\cdot 9 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 4 + 1\cdot 7 & 2\cdot 2 + 1\cdot 5 + 1\cdot 8 & 2\cdot 3 + 1\cdot 6 + 1\cdot 9 \end{bmatrix}$$

Matrisen og likningssett:

$$x + 2y = -1$$
$$2x - 3y = 5$$

Skrive på matrise form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vektorer:
Vi vil helst skrive vektorer som kolonner

Utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Kan $\boxed{\text{radredusere}}$ den utvidede matrisen, og resultatet er et system med samme løsningen

Radreduksjon:

1. Rad ganget med tall (ikke null)
2. Bytt plass på to rader
3. Rad + tall ganget annen rad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \overset{R_2 - 2\cdot R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{7}\cdot R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - 2\cdot R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x = 1$

$y = -1$

$$x + 2y - z = 1$$
$$2x - y + 2z = 5$$
$$x - 3y + 3z = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - 2\cdot R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cancel{\overset{-\frac{1}{5}\cdot R_2}{\sim}}$$

$$\overset{-\frac{1}{5}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + \frac{3}{5}z = \frac{11}{5}$$
$$y - \frac{4}{5}z = -\frac{3}{5}$$
$$0 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{11}{5} - \frac{3}{5}z \\ y &= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}z \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} - \frac{3}{5}z \\ -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 7$$

2×2-det.

$$\begin{vmatrix} \oplus 1 & \ominus 2 & \oplus 3 \\ \ominus 4 & \oplus 5 & \ominus 6 \\ \oplus 7 & \ominus 8 & \oplus 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

To triks:

① Velg en rad eller kolonne med flest mulig nuller.

② Vi kan (ish) radredusere.

i) Bytt to rader, endrer fortegn på det.

ii) Gange rad med tall, ganger det med samme tall.

iii) Rad pluss tall ganget rad endrer ikke det.

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}R_2-4\cdot R_1\\ \sim \\ R_3-7\cdot R_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}+\\-\\+\end{matrix}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{vmatrix}$$

$$1\cdot\begin{vmatrix}-3&-6\\-6&-12\end{vmatrix} \cancel{-0\cdot\begin{vmatrix}\;\end{vmatrix}} \cancel{+0\cdot\begin{vmatrix}\;\end{vmatrix}}$$

$$1\cdot(36-36)=1\cdot 0=0.$$

Påstander:

- En matrise er invertibel kun hvis $\det(A) \neq 0$
- Likninga $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsninga $\vec{x} = 0$ hvis og bare hvis $\det A \neq 0$
- Produktet av egenverdier til A (med multiplisitet) er lik $\det A$
- A kan radreduseres til identiteten hvis og bare hvis $\det A \neq 0$.

Identitet og invers:

- Identitetsmatrisen

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Har at $I_m \cdot A = A$ $\quad$ A en $m \times n$-matrise

$$A \cdot I_n = A$$

Hvis A er kvadratisk, så er A^{-1} matrisen slik at

$$A^{-1} \cdot A = I_n \quad \text{og} \quad A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Finne inverser:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Større matriser:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\mathrm{Cof}\, A)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Generell metode for å finne inversen:

$$\left(A \middle| I_n\right) \sim \left(I_n \middle| A^{-1}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-1 \cdot R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{R_1 - R_3}{\overset{R_2 - R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenverdier og egenvektorer:

Vil løse likninga, for $\vec{x} \neq \vec{0}$.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad A\vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\underbrace{(A - \lambda I_n)}_{B}\vec{x} = \vec{0}$$

Vil ha løsning som <u>ikke</u> er $\vec{x} = \vec{0}$.

$\det B \neq 0$ finnes <u>kun</u> $\vec{x} = \vec{0}$ -løsninga.

Når er $\det(A - \lambda I_n) = 0$?

Dette er én likning med én ukjent.

Er et polynom av grad lik dim til $\vec{x}$

Finner da n λ-verdier.

Vil nå løse

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Setter inn for λ, løser.

$$\left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right) \sim \left(\begin{matrix} \text{———} \\ 0 \; 0 \cdots 0 \end{matrix}\right)$$

Antall frie variable vil alltid være mindre eller lik multiplisiteten til λ som egenverdi (og alltid mer enn 1)

(Må være <u>lik</u> for alle egenverdier for at A diagonaliserbar)

Vil typisk ha én egenvektor per fri variabel.

(Antall frie variable = antall rader med kun 0-er.

Diagonalisering

A er diagonaliserbar hvis vi kan skrive

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$ hvor D er diagonal.

Viser seg at vi må ha

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$ og $$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

Hvor λ_i er egenverdier og $\vec{v}_i$ egenvektorer.

Differensiallikninger

Homogen differensiallikning.

$$\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$$

Generelle løsninga: $\vec{x}(t) = C_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \vec{v}_3 e^{\lambda_3 t}$

$$\vec{x}(0) = \vec{b} \iff P \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Inhomogene differensiallikninger:

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}$$

Løsninga:

Løser først $\vec{x}_c' = A\vec{x}_c$

(Hvis $\vec{b}$ er konstant)

Generell løsning:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_c(t) - A^{-1}\vec{b}$$

Spesiell løsning:

$$\vec{x}(0) = \vec{c} = \vec{x}_c(0) - A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x}_c(0) = \vec{c} + A^{-1}\vec{b}$$

$$\boxed{P \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{c} + A^{-1}\vec{b}}$$