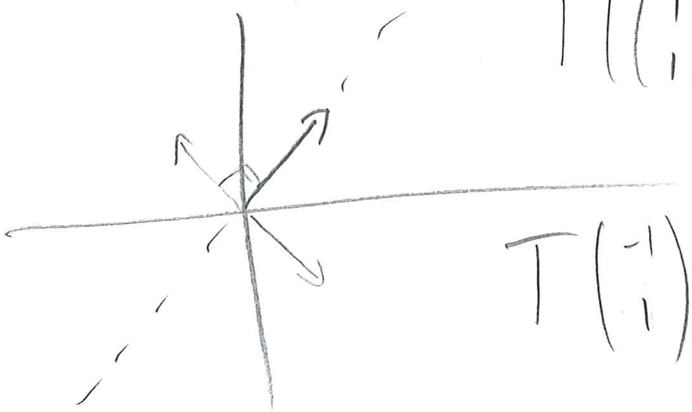
Komplekse egenverdier:

$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ sier at A bare endrer lengden til $\vec{x}$.

Eks:

Lineærtransformasjonen T består av speiling gjennom linja $y=x$.

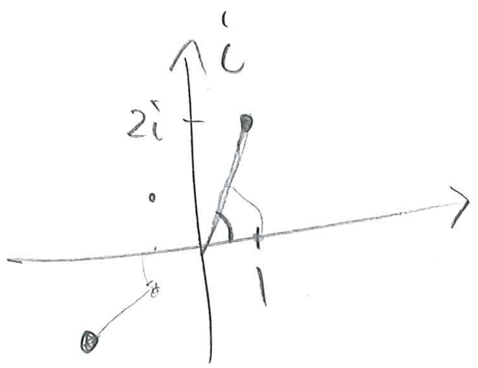
Hva er egenverdiene og egenvektorene til matrisen som hører til transformasjonen.



$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Tolkning av komplekse tall:



$1+2i$

Et komplekst tall har en vinkel og en lengde.

Å gange med dette komplekse tallet, er det samme som å rotere med tallets vinkel og skalere med tallets lengde.

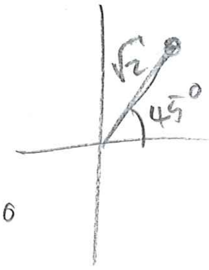
$(1+2i)(-1+i)$

Vi kan bruke dette til å tolke komplekse egenverdier.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Finn egenverdier.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$



Å gange med $1+i$ er samme som å rotere $45°$ og så skalere med faktor $\sqrt{2}$!

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$$

↑

Matrisen som roterer $45°$ og skalerer med faktor $\sqrt{2}$!

Løsning av differensiallikninger.

~~To~~ System av to differensiallikninger,

får en 2x2-matrise, vil ha to egenverdier

og to egenvektorer, generell løsning er

$$\vec{x} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \vec{V_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{V_2}$$

Hva skjer når λ er kompleks?

- Får at $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$
- Får at $\vec{V_1} = \overline{\vec{V_2}}$

$$\overline{1-3i} = 1+3i$$

For at $\vec{x}$ skal bestå av reelle løsninger, må også

C_1 og C_2 være komplekse tall.

„Triks". I stedet for å skrive

$$\vec{x} = C_1 \cdot \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 \quad \text{med} \quad \vec{x}_1 = e^{\lambda_1 t}\vec{V_1}, \quad \vec{x}_2 = e^{\lambda_2 t}\vec{V_2}$$

skriver i stedet

$$\vec{x} = D_1 \cdot \vec{y}_1 + D_2 \vec{y}_2 \quad \text{med} \quad \vec{y}_1 = \mathrm{Re}(\vec{x}_1), \quad \vec{y}_2 = \mathrm{Im}(\vec{x}_1)$$

← Vanlig reell vektor

← Ditto.

Gjør at D_1 og D_2 kan være reelle for at vi skal få ut et reelt svar.

$z = a + ib \qquad \bar{z} = a - ib$

$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \dfrac{z + \bar{z}}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$

$\mathrm{Im}(z) = b \qquad \dfrac{z - \bar{z}}{2i} = b = \mathrm{Im}(z)$

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1$$

$$\vec{x}_2 = e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 = e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{\vec{v}}_1 = \overline{e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1} = \overline{\vec{x}_1}$$

$$\vec{y}_1 = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2 \qquad \vec{y}_2 = \frac{1}{2i}\vec{x}_1 - \frac{1}{2i}\vec{x}_2$$

$$\vec{x} = D_1 \vec{y}_1 + D_2 \vec{y}_2$$

$$= \frac{1}{2} D_1 \vec{x}_1 + \frac{1}{2} D_1 \vec{x}_2 + \frac{1}{2i} D_2 \vec{x}_1 - \frac{1}{2i} D_2 \vec{x}_2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2i}\right)}_{C_1} \vec{x}_1 + \underbrace{\left(\frac{D_1}{2} - \frac{D_2}{2i}\right)}_{C_2} \vec{x}_2$$

I praksis, en viktig formel:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ekstra: $e^{a+ib} = e^{a} e^{ib}$

Løs differensiallikningen

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_1 - x_2 \qquad x_1(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2 = x_1 + x_2 \qquad x_2(t)$$

① ~~Skriv~~ på matriseform

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

② Finn egenverdier til matrisen.

Fant i stad $\lambda_1 = 1+i$ $\quad \lambda_2 = 1-i$ $\quad$ Ser at $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

③ Finn egenvektor til matrisen.

Finner egenvektor til $\lambda = 1+i$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 + iR_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - iy = 0 \\ x = iy \end{matrix}$$

Velger $y=1$ for egenvektor, får $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

Da må $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Generell løsning:

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{V_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{V_2}$$

$$= C_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= D_1 \operatorname{Re}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right) + D_2 \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

se på $e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$e^{(1+i)t} = e^{t+it} = e^t e^{it} = e^t(\cos t + i \sin t)$$

$$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \cos t \cdot i - e^t \sin t \\ e^t \cos t + i e^t \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{y_1} = \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} \qquad \vec{y_2} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = D_1 \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

$x_1(0) = 2$

$x_2(0) = 3$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} =$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix}$$

Så $D_1 = 3 \quad D_2 = 2.$

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$i(C_1 - C_2) = 2 \qquad C_1 = 3 - C_2$

$C_1 + C_2 = 3 \qquad$ Protip: $\frac{1}{i} = -i$

$i(3 - 2C_2) = 2$

$3 - 2C_2 = -2i \qquad C_2 = \frac{3}{2} + i$

$C_1 = \frac{3}{2} - i$

$$\left(\frac{3}{2} - i\right) e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2} + i\right) e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + 2e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$x_1(t) = -Ce^t\sin t + De^t\cos t$ Generell

$x_2(t) = Ce^t\cos t + De^t\sin t$

$x_1(t) = -3e^t\sin t + 2e^t\cos t$ spesifikk

$x_2(t) = 3e^t\sin t + 2e^t\cos t$

Polynom og matriser i polynom

Før vi starter, fun fact:

Hvis A har egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ da vil $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$.

<u>Eks:</u> Hvis en 2×2 matrise har egenverdi 3 og determinant 6 <u>må</u> den andre egenverdien være 2.

<u>Følger at:</u>

Matrise ikke invertibel $\Leftrightarrow$ Determinant lik 0

$\Leftrightarrow$ En av egenverdiene er 0.

Et polynom er en formel som plusser sammen

$1, x, x^2, x^3,$ etc.

$$x^4 - 3x^2 + 7x - 12.$$

For kvadratisk matrise A kan vi regne ut:

$$A^4, \ -3A^2, \ 7A,$$ og vi kan plusse sammen

$$A^4 - 3A^2 + 7A - 12I$$, svaret blir en ny $n \times n$-matrise

---

Cayley-Hamilton-teoremet

Hvis A har karakteristisk polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

så vil

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 2:

Hvis $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 I = 0$

så må alle egenverdiene til A tilfredsstille

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Merk: Ikke krav om at A er en $n \times n$-matrise, eller at alle løsninger av likningen er egenverdien.

Ex:

Se på likningen

$$A^2 - 5A + 6I = 0.$$

Da må egenverdiane til A tilfredsstille

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ eller } \lambda = 3.$$

Mulig at A er en 3×3-matrise med egenverdier

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$ eller

en 3×3-matrise med egenverdier $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3.$

Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

er en 3×3-matrise med $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3.$

$$A^2 - 5A + 6I =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk:

Hvis $A^2 - 5A + 6I = 0$

så må egenverdiene til A være 2 eller 3.

Spesifikt, egenverdiene kan ikke være 0.

Så A må være inverterbar.

Vi kan finne en formel for den invese vha. polynomet.

$$A^2 - 5A + 6I = 0$$

$$6I = 5A - A^2$$

$$I = \frac{5}{6}A - \frac{1}{6}A^2$$

$$I = \underbrace{\left(\frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A\right)}_{B} A \qquad B = \frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A$$

$$I = B \cdot A \qquad \text{Må ha at } B = A^{-1}$$

Derfor $A^{-1} = \frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A$

Matrise $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Finn egenverdier ~~og e~~

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3+\lambda)+2 = \lambda^2+3\lambda+2$$

Gir $\lambda=-1$ og $\lambda=-2$.

Finn inversen til A.

Vet at $A^2+3A+2I=0$

$$2I = -A^2-3A$$

$$I = -\frac{1}{2}A^2-\frac{3}{2}A$$

$$I = A\left(-\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}I\right)$$

Får at $A^{-1} = \left(-\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}I\right) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tilsvarende eksempel med ikke-inverterbar matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 - 6$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda = 0 \qquad \text{Gir } \lambda = 0 \quad \lambda = 7$$

Prøver å sette inn A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 7 \cdot A = 0$$

$$A \cdot (A - 7I) = 0$$