System av differensialligninger

$$y' = a \cdot y$$

Løsning: $y = Ce^{a \cdot t}$

$$y' = Cae^{a \cdot t} = a \cdot y$$

Vi skal nå se på oppgaver av typen:

$$x_1' = 4x_1 + 2x_2$$
$$x_2' = 3x_1 - x_2$$

Trikset er, jobb med matriser. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

Problemet er nå:

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Fra forrige forelesning: Kan diagonalisere A.

Vi får $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = P \cdot D \cdot \boxed{P^{-1}\vec{x}}$$ Definerer $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$

$$P^{-1}\vec{x}' = D \cdot P^{-1}\vec{x}$$

$$(P^{-1}\vec{x})' = D \cdot P^{-1}\vec{x} \Rightarrow \vec{y}' = D \cdot \vec{y}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}' = D \cdot \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1' = -2y_1 \qquad y_1 = C \cdot e^{-2t}$$
$$y_2' = 5y_2 \qquad y_2 = D \cdot e^{5t}$$

Vi har $\vec{y} = P^{-1}\vec{x} \Rightarrow \vec{x} = P \cdot \vec{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \cdot e^{-2t} \\ D \cdot e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{-2t} + 2De^{5t} \\ -3Ce^{-2t} + De^{5t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Ce^{-2t} \\ -3Ce^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2De^{5t} \\ De^{5t} \end{pmatrix}$$

$$= Ce^{\boxed{-2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + De^{\boxed{5}t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Egenverdiene til matrisen

Egenvektorene til matrisen.

Teorem:

Den generelle løsningen av systemet

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

er gitt ved

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{V}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{V}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \vec{V}_n$$

Typisk får vi initialbetingelser,

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_2+3R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{7}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1-2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} C_1 &= -\frac{3}{7} \\ C_2 &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{3}{7} e^{-2t} + \frac{10}{7} e^{5t}$$

$$x_2 = \frac{9}{7} e^{-2t} + \frac{5}{7} e^{5t}$$

$$\vec{x} = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = -\frac{3}{7} \qquad C_2 = \frac{5}{7}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{7} e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{5}{7} e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} e^{-2t} \\ \frac{9}{7} e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{7} e^{5t} \\ \frac{5}{7} e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} e^{-2t} + \frac{10}{7} e^{5t} \\ \frac{9}{7} e^{-2t} + \frac{5}{7} e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{3}{7} e^{-2t} + \frac{10}{7} e^{5t}$$

$$x_2 = \frac{9}{7} e^{-2t} + \frac{5}{7} e^{5t}$$

$$x_1' = 4x_1 + 2x_2$$

$$x_2' = 3x_1 - x_2$$

$$x_1 = -\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{10}{7}e^{5t}$$

$$x_2 = \frac{9}{7}e^{-2t} + \frac{5}{7}e^{5t}$$

$$x_1' = \frac{6}{7}e^{-2t} + \frac{50}{7}e^{5t}$$

Like

$$x_2' = -\frac{18}{7}e^{-2t} + \frac{25}{7}e^{5t}$$

$$4x_1 + 2x_2 = 4\left(-\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{10}{7}e^{5t}\right) + 2\left(\frac{9}{7}e^{-2t} + \frac{5}{7}e^{5t}\right)$$

$$= -\frac{12}{7}e^{-2t} + \frac{40}{7}e^{5t} + \frac{18}{7}e^{-2t} + \frac{10}{7}e^{5t}$$

Like

$$= \left(-\frac{12}{7} + \frac{18}{7}\right)e^{-2t} + \left(\frac{40}{7} + \frac{10}{7}\right)e^{5t}$$

$$= \frac{6}{7}e^{-2t} + \frac{50}{7}e^{5t}$$

$$3x_1 - x_2 = 3\left(-\frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{10}{7}e^{5t}\right) - \left(\frac{9}{7}e^{-2t} + \frac{5}{7}e^{5t}\right)$$

$$= -\frac{9}{7}e^{-2t} + \frac{30}{7}e^{5t} - \frac{9}{7}e^{-2t} - \frac{5}{7}e^{5t}$$

$$= -\frac{18}{7}e^{-2t} + \frac{25}{7}e^{5t}$$

Recap av løsningsmetode:

$$x_1' = 3x_1 - x_2$$
$$x_2' = 5x_1 - 3x_2$$

① Skriv opp som matrisesystem. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

② Finn n egenverdier og $\overset{n}{\text{r}}$ egenvektorer til matrisen.

Egenverdi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, med tilhørende egenvektorer

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$

Løsningen, generelle

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{V}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{V}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \vec{V}_n$$

Initialverdier gitt ved $\vec{x}(0) = \vec{b}$

$$P \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

Inhomogent likningssystem:

Hvis vi skal løse

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{b},$$

løses ved å først løse $\vec{x}_c\,' = A\vec{x}_c,$

så setter vi

$$\vec{x} = \vec{x}_c - A^{-1}\vec{b}$$

Bevis:

$$\vec{x}\,' = (\vec{x}_c - A^{-1}\vec{b})' = \vec{x}_c\,' - (A^{-1}\vec{b})'$$

$$= A\vec{x}_c - \vec{0} = A\vec{x}_c$$

$$A\vec{x} + \vec{b} = A(\vec{x}_c - A^{-1}\vec{b}) + \vec{b} = A\vec{x}_c - \vec{b} + \vec{b} = A\vec{x}_c$$

Må ha A invertibel for å løse dette.

A trenger ikke være invertibel for å løse

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}$$

Men trengte A diagonaliserbar.

Hvis vi er i 2 dimensjoner, vil A ha to egenverdier, to options:

- λ_1, λ_2 er begge <u>reelle</u>, vi får to uavhengige løsninger,

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda t} \qquad \vec{y}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\vec{x} = C_1 \vec{y}_1 + C_2 \vec{y}_2$$

- λ_1 og λ_2 er begge <u>komplekse</u>, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, får to uavhengige løsninger

$$\vec{y}_1 = Re(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) \qquad \vec{y}_2 = Im(v_1 e^{\lambda_1 t})$$

$$\vec{x} = C_1 \vec{y}_1 + C_2 \vec{y}_2$$

<u>Eks:</u> Løs:

$$x_1' = 4x_1 - 3x_2$$
$$x_2' = 3x_1 + 4x_2$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Må finne egenverdier/egenvektorer til A.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 = 0 \qquad \lambda = \frac{+8 \pm \sqrt{64-100}}{2}$$

$$= \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \qquad = \frac{8 \pm 6i}{2} = \underline{4 \pm 3i}$$

$$\lambda_1 = 4+3i \qquad \lambda_2 = 4-3i$$

Egenvektor til $\lambda_1 = 4+3i$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 & 0 \\ 3 & -3i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 - iR_1}{\sim} \begin{pmatrix} -3i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{3}R_1}{\sim} \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ix - y = 0$

$ix = y$ Velger $y=1$

Egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

Får $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi trenger i

$$\vec{y}_1 = Re\left(\vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t}\right) = Re\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(4-3i)t}\right)$$

$$= Re\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} e^{-3ti}\right)$$

$$= Re\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}\left(\cos(-3t) + i\sin(-3t)\right)\right)$$

$$= Re\begin{pmatrix} i\cos(-3t)e^{4t} - e^{4t}\sin(-3t) \\ e^{4t}\cos(-3t) + ie^{4t}\sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t}\sin 3t \\ e^{4t}\cos 3t \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_2 = \mathrm{Im}\left(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}\right) = \begin{pmatrix} e^{4t}\cos 3t \\ -e^{4t}\sin 3t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} e^{4t}\sin 3t \\ e^{4t}\cos 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{4t}\cos 3t \\ -e^{4t}\sin 3t \end{pmatrix}$$

Viktig regel:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(i radianer)}$$