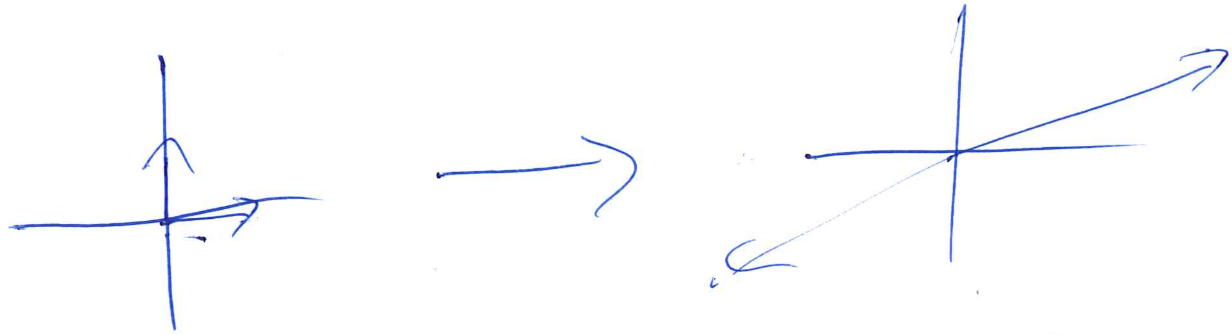
Egenverdier og egen vektorer

$$\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$



I hvilke retningen <u>skalerer</u> matrisen vektoren?

$$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Denne matrisen <u>skalerer</u> med <u>1</u> i <u>alle</u> retninger.

Vi vil løse

$$A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$$

Her er A en kjent matrise.
Vi vil finne λ og $\vec{x}$.

Kaller λ for <u>egenverdi</u> til matrisen, og
$\vec{x}$ for <u>egenvektor</u> til egenverdien.

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = 2 \cdot \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$ <u>er</u> egenverdier for A
med tilhørende egenvektorer $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{x}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hvis $\vec{x}$ er en egenvektor, $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$

Da vil $c \cdot \vec{x}$ gi oss: $A(c \cdot \vec{x}) = c \cdot A \cdot \vec{x} = c \cdot \lambda \cdot \vec{x}$

$$= \lambda \cdot (c \cdot \vec{x})$$

Så $c \cdot \vec{x}$ er <u>også</u> en egenvektor.

$\vec{x} = \vec{0}$ er <u>aldri</u> en egenvektor.

Hvordan finner vi egenverdier?

$$A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x} \Rightarrow A\cdot\vec{x} - \lambda\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow A\cdot\vec{x} - \lambda\cdot I\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (A-\lambda\cdot I)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

Vil finne $\vec{x}\neq\vec{0}$ slik at $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

Likninga har nøyaktig én løsning om $A-\lambda I$ er invertibel.

Vi vil at $A-\lambda I$ ikke skal være invertibel.

Vi vil ha

$$\boxed{\det(A-\lambda I) = 0}$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-2-\lambda) + 12 = 0$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Løs denne, får $\lambda = 1$ og $\lambda = 2$.

Hvordan finner vi egenvektorer?

Velg en egenverdi, se på likninga.

$\boxed{\lambda = 1}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$5x - 6y = x$$
$$2x - 2y = y$$

$$4x - 6y = 0$$
$$2x - 3y = 0$$

$$x = \frac{3}{2}y \qquad x = \frac{3}{2}y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eks: $y = 2$ gir $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$5x - 6y = 2x$$
$$2x - 2y = 2y$$

$$3x - 6y = 0$$
$$2x - 4y = 0$$

$$x = 2y \qquad x = 2y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eks: $y = 1$ gir $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi kan spare litt tid ved å se at vi skal løse

$$(A - \lambda \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 - 3R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eks:

Finn egenverdier og egenvektorer til

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda \cdot I| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 6-\lambda & 2 \\ 16 & -15 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -15 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left((6-\lambda)(-5-\lambda) + 30\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = 0$$

$3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\lambda = 1$

$\lambda = 0$

$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 - 16R_1}{\overset{R_2 + 4R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -15 & -5 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 \cdot \frac{1}{6}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -15 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3 + 15 \cdot R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = 0$

$y + \frac{1}{3}z = 0$

$z = -3y$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -3y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eks: $y = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\lambda = 1}$$

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 - 16R_1}{\overset{R_2 + 4R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -15 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_3 + 15 \cdot R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y + \frac{2}{5}z = 0 \\ \quad y = -\frac{2}{5}z \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eks $z = 5$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6-\lambda & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -5-\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \Leftrightarrow R_3}{\overset{R_1 \Leftrightarrow R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 \\ 16 & -15 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 \cdot \frac{-1}{4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 16 & -15 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_2 - 16R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1 + \frac{3}{4}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - \frac{1}{2}z = 0$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{1}{2}z$$

$$2x = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eks: $x = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matrisen

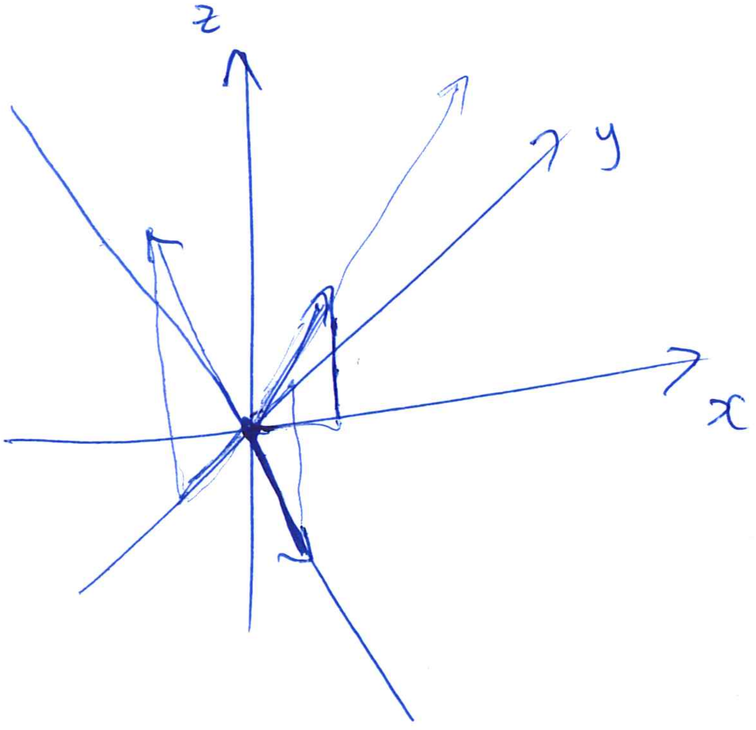
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

har egen verdier

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 3$

og egen vektorer

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Hva er

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = A \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 2 \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hva er

$$A^7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = A^7 \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 2 \cdot A^7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + A^7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - A^7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 0^7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1^7 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 3^7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2187 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2187 \\ -2 \\ -4369 \end{pmatrix}$$

Hvordan finner vi 2, +1, og -1 ?

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0a + 0b + 1c \\ 1a - 2b + 0c \\ -3a + 5b + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 2 \qquad b = 1 \qquad c = -1$$

<u>Recap:</u>

Vil finne λ og $\vec{x}$ slik at

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Løser $\det(A - \lambda I) = 0$ Blir en n-te gradslikning ($A = n \times n$-matrise)

Finner λ.

Løser $(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ for hver λ.

Vil ha uendelig mange løsninger.

Siste ex:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$= \lambda^2 + 1 = 0$$

Ingen reell løsning. Kan fremdeles se på komplekse løsninger:

$\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, gir oss komplekse egenvektorer.