Transponerte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hvis A er en $m \times n$-matrise, så er A^T en $n \times m$-matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten til en matrise

Vi kan finne determinanten til <u>kvadratiske</u> matriser.

1×1-matrise

(7) determinanten er 7

$$\det A = |A|$$

Problematisk notasjon: $|-3| = -3$ Forvirrende.

Bryr oss sjelden om determinant til 1×1-matriser.

$$\det(-3) = -3.$$

2x2-matriser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 5\cdot(-2) = 13$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$$ determinanten.

3x3-matriser:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot 1 + 2\cdot 5 - 3\cdot(-4)$$

$$= \underline{\underline{27}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{-}{\cancel{+}} 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

Teorem;

Vi kan selv velge <u>hvilken</u> rad <u>eller</u> kolonne vi regner langs, men må holde styr på fortegn.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \overset{-}{\cancel{+}} \\ - & + & - & + \\ + & - & + & \cancel{+}\,- \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \cdot \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}}$$

$$- 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \cdot \left(-2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1)\right)$$

$$- 1 \cdot \left(5 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3\right)$$

$$= 28 - 1 = \underline{\underline{27}}$$

Teorem:

Hvis du får B ved å gjøre én radoperasjon på A, så:

- A ~~går~~ blir til B ved å bytte plass på to rader,

  $|B| = -|A|$

- A blir til B ved å gange rad med tall, k.

  $|B| = k \cdot |A|$

- A blir til B ved å plusse tall ganget rad med rad,

  $|B| = |A|$

Andre egenskaper:

- Hvis to rader i A er like, så er $|A| = 0$.

- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

<u>Teorem</u>: A er invertibel (A^{-1} finnes) <u>hvis og bare hvis</u> $|A| \neq 0$.

(Hvis A^{-1} finnes så er $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$)

$$|A \cdot A^{-1}| = |I|$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Eks: Har $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en invers?

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$ Nei.

Har $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ en invers?

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$ Nei

$$|A^T| = |A|$$

Nytt triks for å regne ut invers til 2x2-matrise:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Bytt plass på den ene diagonalen
- Bytt fortegn på den andre diagonalen.
- Del på determinanten.

Huskeregel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ For at dette skal stemme, må vi bytte fortegn på nullene.

Eks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 29$$

$$A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Adjunktmatrisen til A

Kofaktormatrisen.

Bruk dette på en 2×2-matrise:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cramers regel:

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$$
$$-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 29$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{33}{29}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-23}{29}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{35}{29}$$

Noen regneregler for transponerte:

$$(A^T)^T = A \qquad (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(k \cdot A)^T = kA^T \qquad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Eks:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{B \cdot A}$$

$$\underset{B^T}{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A^T}{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{A^T \cdot B^T}$$

Prikkprodukt:

Vektorer skrives som kolonner

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \vec{u}^T \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}-4\cdot\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{II}-4\cdot\mathrm{I} \\ \sim \\ \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & 17 \\ 0 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & 17 \\ 0 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 17 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\,\cdot\,| + 0 \cdot |\,\cdot\,|$$

$$= 8 \cdot 14 - 5 \cdot 17 = 27$$

$$\frac{1}{8}|A| = |B|$$

$$|A| = 8 \cdot |B|$$

$$\overset{\frac{1}{8}\cdot \mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{17}{8} \\ 0 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-5\cdot \mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 14-5\cdot\frac{17}{8} \end{pmatrix}$$

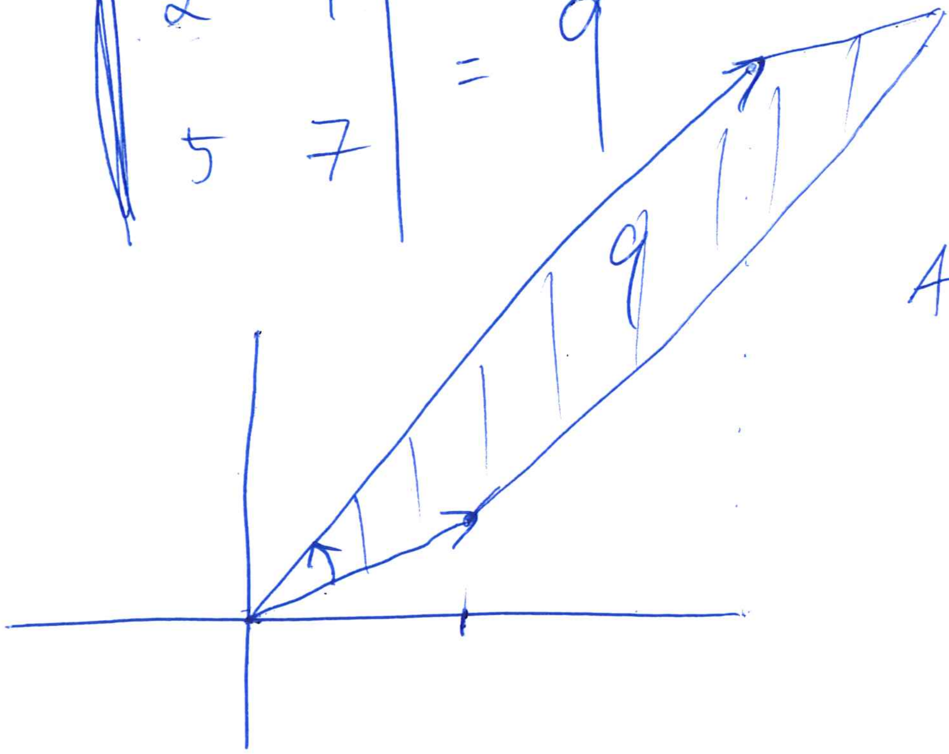
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 14-5\cdot\frac{17}{8} \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \left(14 - 5 \cdot \frac{17}{8}\right)$$

$$|A| = 8 \cdot \left(14 - 5 \cdot \frac{17}{8}\right) = 8 \cdot 14 - 5 \cdot 17$$

$$= 27$$

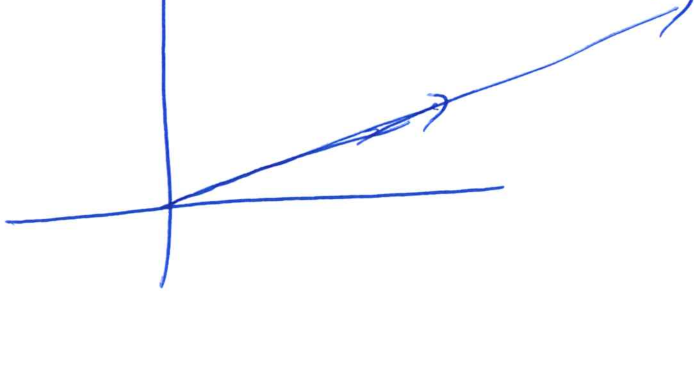
Determinanter, geometrisk tolkning

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9$$



Areal 9.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$



I 3D:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

Volum på 15