Matriseoperasjoner og inverse matriser

<u>Sist</u>: Matriser brukt til å løse liknings-system.

<u>Nå</u>: Matriser for seg selv.

En matrise er en firkant med tall.

$$\begin{array}{cc} & 4 \\ 3 & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 7 & -14 \end{pmatrix} \end{array} = A \qquad 3\times 4\text{-matrise}$$

$a_{1,2}$ $\quad a_{2,2}$ $\quad a_{2,3}$

<u>Plusse matriser:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 9 \\ 9 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Vi plusser <u>hvert koordinat</u>.

Vi kan <u>kun</u> plusse to matriser hvis de er <u>like store</u>.

<u>Gange matriser med tall:</u>

$$4\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 12 & 20 & -8 \end{pmatrix}$$

Vi ganger tallet med <u>hvert koordinat</u>.

Vi kan <u>alltid</u> gange et tall med en matrise.

Å gange matriser:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 12 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 3\cdot1+5\cdot1-2-5 & 3\cdot3+5\cdot4 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+5\cdot1-2\cdot1-5\cdot1 & 3\cdot3+5\cdot4+2\cdot1+1\cdot1 & 3\cdot7+5\cdot12+2\cdot3+1 \\ 2\cdot1+1\cdot1-1\cdot1+3\cdot5 & 2\cdot3+1\cdot4+1\cdot1-1\cdot3 & 2\cdot7+1\cdot12+1\cdot3-1\cdot3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 32 & 88 \\ 17 & 8 & 26 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{4 \quad \cdot \quad 4} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

Disse må være like.

Matrise-ganging og likningssystem.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 8y + 7z &= 20 \\ 2x + 7y + 9z &= 23 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 2y + z \\ 3x + 8y + 7z \\ 2x + 7y + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a \\ 3x - 4y + 2z &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= u \\ -a + b &= v \\ a - 2b &= w \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -8 & 8 \\ 2 & -6 & 1 \\ -5 & 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$x + 2y + z = a$$
$$3x - 4y + 2z = b$$

$$2a + 3b = u$$
$$-a + b = v$$
$$a - 2b = w$$

$$u = 2(x + 2y + z) + 3(3x - 4y + 2z)$$
$$u = 11x - 8y + 8z$$
$$v = \cdots$$
$$w = \cdots$$

Matriser oppfører seg <u>for det meste</u> som tall:

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \qquad A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ gir mening. Men $B \cdot A$ gir <u>ikke</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Feil antall element i rad vs kolonne.

Plussing:

Ett spesielt tall for plussing: 0.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Å plusse med 0 er samme som å gjøre ingenting.

Matriser:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrise av bare nuller.
Av riktig størrelse

Dette en 3x3-matrise.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ganging:

Ett spesielt tall for ganging.

$$\underline{1} \cdot a = a \cdot \underline{1} = a.$$

Tilsvarende matrise $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \cdot A = A$$

$$A \cdot I = A$$

Kan være forskjellig størrelse

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

For kvadratiske matriser får vi $\underbrace{I \cdot A = A \cdot I}_{\text{samme størrelse}} = A$

Minuse matriser:

$$A - B = A + (-1) \cdot B \qquad A - A = O$$

Blir koordinat minus koordinat.

Kan vi dele matriser?

Hva betyr $\dfrac{A}{B}$? $\qquad 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ $\qquad$ så å dele på 3 er det motsatte av å gange med 3.

$\dfrac{1}{B}$ skriver vi som B^{-1}

Så $A \cdot B^{-1}$ og $B^{-1} \cdot A$ er lovlige ting vi kan regne ut.

Hva er B^{-1}? En matrise slik at

$$B \cdot B^{-1} = I \qquad B^{-1} \cdot B = I$$

Merk: B må være kvadratisk.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ Hva er A^{-1}? $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + 2d &= 0 \\ 2a \quad &= 0 \\ 2b \quad &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c &= \tfrac{1}{2} \\ d &= -\tfrac{1}{4} \\ a &= 0 \\ b &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x \quad &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot u = A^{-1} \cdot b$$

$$I \cdot u$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Vil finne invers til $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II - 2 \cdot I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II \cdot -\frac{1}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \overset{I - 2 \cdot II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II - I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Får ikke tak i identitetsmatrisen på venstresiden.

Fordi A har ingen invers.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

Vises seg:

A har en invers kun hvis alle likningen

$A \cdot x = b$ har nøyaktig én løsning.

Kan si: $A \cdot x = 0$ har nøyaktig én løsning.

Setning:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Setning: „Følgende er ekvivalent" A er kvadratisk

Hvis én av disse holder, må alle holde.

1. A er radekvivalent med identitetsmatrisen
   $A \sim I$
2. A^{-1} finnes
3. $A \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$
4. For alle b så har $A \cdot x = b$ nøyaktig én løsning.