Matriser og Gauss-Jordan-eliminasjon

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 8y + 7z &= 20 \\ 2x + 7y + 9z &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

$\text{II} - 3 \cdot \text{I}$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2y + 4z &= 8 \\ 2x + 7y + 9z &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

$\text{III} - 2\text{I}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2y + 4z &= 8 \\ 3y + 7z &= 15 \end{aligned}$$

$\text{II} \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$\text{III} - 3 \cdot \text{II}$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \Rightarrow y = -2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriser

$$\begin{array}{cc} & \text{4 kolonner} \\ \text{3 rader} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

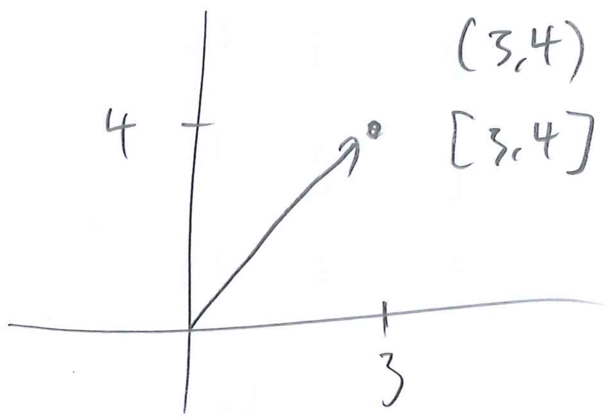
Kalles en 3×4 - matrise

Eks:

$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ er en 2×2-matrise

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ er en 1×3-matrise
kalles en radvektor

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en 3×1-matrise
kalles en kolonnevektor.



$(3,4)$ 1×2-matrise

$[3,4]$

$3x + 0y = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

$y = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2.4, 3.2, 4.7)$$

Kalles for den <u>utvidede</u> <u>koeffisientmatrisen</u> til

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ er <u>koeffisientmatrisen</u>.

En matrise med <u>like mange</u> rader og kolonner kalles en <u>kvadratisk</u> matrise.

En 1×1-matrise er veldig kjedelig, men finnes (7)

Vi har <u>tre</u> radoperasjoner:

1. Vi kan bytte plass på to rader
2. Vi kan gange en rad med et tall (ikke 0)
3. Vi kan plusse en rad med et tall ganget en annen rad.

To matriser er <u>radekvivalente</u> dersom du kan komme deg fra den ene til den andre vha <u>radoperasjoner</u>.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$ er radekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Skriver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorem

Dersom to utvidede koeffisientmatriser er radekvivalente, så har likningssystemene samme løsninger.

Trappeform

Om neste rad har flere nuller i starten enn forrige.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & \end{pmatrix}$$

↑ „Omvendt trappeform"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

???

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Også trappeform

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \end{array}$$

Disse kalles <u>ledende</u> koeffisienter.

Radvektoren er <u>alltid</u> på trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Kolonnevektoren er <u>sjelden</u> på trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gauss-eliminasjon:

Å gjøre en matrise om til trappeform vha radoperasjoner

Gauss-Jordan-eliminasjon:

Gjøre om til <u>redusert</u> trappeform

Redusert trappeform:

Trappeform hvor:

1. De ledende koeffisientene er <u>1</u>.
2. Tallene <u>over</u> de ledende koeffisientene er 0.

Eks:

$$x - 2y = 8$$
$$5x + 3y = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{II - 5 \cdot I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 13 & -39 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II \cdot \frac{1}{13}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{I + 2 \cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -3 \end{matrix}$$

$$x + 2y + z = 4$$
$$3x + 8y + 7z = 20$$
$$2x + 7y + 9z = 23$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$x = 5$
$y = -2$
$z = 3$

4

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 12 \\ x + 2y + 5w &= 17 \\ 3x + 2y + 4z - w &= 31 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\text{III}-3\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\text{I}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{x \quad y}_{\text{Bundne variable}} \quad \underbrace{z \quad w}_{\text{Frie variable}}$$

$$\begin{aligned} x + 2z - 3w &= 7 \\ y - z + 4w &= 5 \end{aligned}$$

$$x = 7 - 2z + 3w$$
$$y = 5 + z - 4w$$

Variable <u>med</u> ledende koeffisienta blir bestemt av de <u>uten</u>.

Stopper på

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x + y + z + w &= 12 \\ y - z + 4w &= 5 \end{aligned}$$

$$y = 5 + z - 4w$$
$$x = 12 - y - z - w$$
$$x = 12 - (5 + z - 4w) - z - w$$
$$x = 7 - 2z + 3w$$

$x = 7 - 2z + 3w$

$y = 5 + z - 4w$

Kan lage parametre, s og t, $z = s$ $w = t$

$x = 7 - 2s + 3t$

$y = 5 + s - 4t$

$z = s$

$w = t$

$3x + 2y = 1$

$6x + 4y = k$

Hva må k være for at det skal finnes løsning?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & k \end{pmatrix} \overset{I \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 & k \end{pmatrix} \overset{II - 6I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

$x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$

$0 = k - 2 \Rightarrow k = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}y$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & k \end{pmatrix} \overset{II - 2I}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$